Université Ibn Tofail

ENSAK octobre 2013

Algèbre S3

DURÉE : 4 heures

Notations

Les espaces vectoriels euclidiens E et F sont les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement munis de leurs bases canoniques, de leurs produits scalaires canoniques notés $(\cdot|\cdot)_E$ et $(\cdot|\cdot)_F$, et des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ induites par ceux-ci. L'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes est noté $\mathscr{M}_{m,n}$. On rappelle que le produit scalaire $(Ax|y)_F$ s'écrit sous forme matricielle ${}^t\!yAx$ ou ${}^t\!x{}^t\!Ay$ où ${}^t\!y$ et ${}^t\!x$ désignent respectivement les transposées des colonnes x et y de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. L'orthogonal d'un sous-espace E' de E est noté $E'^{\perp}$. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_{n,n}$.

CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE À GAUCHE POUR A

Dans cette première partie, la matrice A, élément de $\mathscr{M}_{m,n}$ est supposée de rang n.
On désigne par P le projecteur orthogonal dans $F = \mathbb{R}^m$ sur le sous-espace $\operatorname{Im} A$.
On suppose $m > n$ sauf dans la question 3° b).

1. Propriété d'inversibilité et de transposition

a) Montrer que si b est un vecteur de $\operatorname{Im} A$, l'équation $A.x = b$ admet une solution unique.

b) Montrer que l'endomorphisme ${}^t\!AA$ est symétrique et inversible.
On désigne son inverse par $\left({}^t\!AA\right)^{-1}$.

c) Pour un élément quelconque M de $\mathscr{M}_{m,n}$, comparer $\operatorname{Ker} {}^t\!M$ et $(\operatorname{Im} M)^{\perp}$, $(\operatorname{Ker} M)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} {}^t\!M$.

2. Détermination d'une inverse à gauche de A

a) Soit y un élément de F.
Prouver qu'il existe un vecteur unique x appartenant à E vérifiant $Ax = Py$ et que l'application $y \mapsto x$ ainsi définie de F dans E est linéaire (cette application linéaire est notée $A^{(g)}$).

b) Prouver que le vecteur x précédent est caractérisé par ${}^t\!AAx = {}^t\!Ay$ et en déduire une expression de $A^{(g)}$ à l'aide de A et de ${}^t\!A$.

c) Déduire également de ce qui précède une expression du projecteur P à l'aide de A et de ${}^t\!A$.

3. Propriétés de $A^{(g)}$. Unicité

a) Prouver que $A^{(g)}A = I_n$, et déterminer le rang de $A^{(g)}$.

b) Déterminer $A^{(g)}$ lorsque $m = n$.

c) Soit B un élément de $\mathscr{M}_{m,n}$ tel que $BA = I_n$ et tel que AB soit un projecteur orthogonal.
Prouver que B annule tout vecteur de $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$.
En déduire que, pour tout $y \in F$, $By = A^{(g)}y$.
Exprimer la propriété d'unicité ainsi mise en évidence.

4. Exemples

a) On suppose que les vecteurs colonnes a_i de A sont orthogonaux deux à deux dans F.
Montrer que $A^{(g)}$ s'exprime simplement à l'aide des lignes ${}^t\!a_i$ et des normes $\|a_i\|_F$.
Peut-on avoir $A^{(g)} = {}^t\!A$?

b) Soit un vecteur b, élément non nul de F, cet élément représente l'application linéaire qui à s élément de $\mathbb{R}$ associe $sb \in \mathbb{R}^m$. Déterminer $b^{(g)}$ et exprimer la forme linéaire correspondante sur F au moyen du produit scalaire dans F.

5. Description d'une méthode de détermination de $A^{(g)}$.

On se propose, pour le calcul de $A^{(g)}$, de mettre en œuvre une méthode itérative ne faisant pas appel à des inversions de matrices.

a) Soient F_0 et F_1 deux sous-espaces vectoriels de F tels que $F_1 = F_0 + \text{Vect}\{\delta\}$ où $\text{Vect}\{\delta\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur δ donné dans F_1, et n'appartenant pas à F_0. On pose $\delta = d + d'$ où d' est la projection orthogonale de δ sur F_0. On désigne par P_0 et par P_1 les projecteurs orthogonaux de F respectivement sur F_0 et sur F_1.

Prouver que, pour tout vecteur y de F, on a : $P_1 y = P_0 y + \beta\,(d|y)_F\; d$, où β est un scalaire que l'on déterminera à l'aide de d.

b) On suppose toujours que A est de rang n et que $m > n$. On note A_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ la matrice élément de $\mathscr{M}_{m,n}$ dont les colonnes sont les k premières colonnes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de A.

À l'aide de ce qui précède, déterminer un vecteur d_k de F tel que pour $k \geqslant 2$, on ait :

$$(1) \qquad A_k A_k^{(g)} = A_{k-1} A_{k-1}^{(g)} + d_k d_k^{(g)}.$$

Exprimer d_k à l'aide de $I_m - A_{k-1} A_{k-1}^{(g)}$ et de a_k.

Pour k entier donné $(1 \leqslant k \leqslant n)$ on écrit $A_k^{(g)}$ sous la forme $A_k^{(g)} = \begin{pmatrix} C_k \\ {}^t\gamma_k \end{pmatrix}$ où C_k est une matrice de $\mathscr{M}_{k-1,m}$ et γ_k une matrice colonne à m éléments.

c) Écrire à l'aide des blocs C_k, γ_k, A_{k-1} et a_k la relation $A_k^{(g)} A_k = I_k$.

En utilisant le fait que γ_k est un élément de $\text{Im}\, A_k$, déduire en particulier des relations ainsi obtenues, que $\gamma_k = \dfrac{d_k}{\|d_k\|^2}$.

d) À l'aide de la relation (1), déterminer C_k à l'aide de $A_{k-1}^{(g)}$, de d_k et de a_k.

Montrer enfin que $C_k = A_{k-1}^{(g)} \left[I_m - a_k d_k^{(g)} \right]$.

UNIVERSITE IBN TOFAIL
Semestre 1, ENSAK

Contrôle d'algèbre

le 7 janvier 2014.

EXERCICE 1 *On considère le système S:*
$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y-z=2 \\ x+2y=0 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$

1. *Le système admet-il des solutions?*
2. *Donner la meilleur solution au sens des moindres carrés*

EXERCICE 2 *L'espace* $\mathbb{R}^3$ *étant muni de son produit scalaire canonique, et* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit u l'endomophisme de* $\mathbb{R}^3$ *qui a pour matrice dans la base B la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & tan\theta & 0 \\ -tan\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *où* $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* $u + Id$ *est inversible.*
2. *Déteminer* u^*, *l'adjoint de u, en fonction de u.*
3. *Soit* $F = (ker(u))^{\perp}$. *Déterminer une base orthonormée de F*
4. *On pose* $r = (-u + Id)o(u + Id)^{-1}$. *Montrer que r est une rotation et déterminer ses éléments caractéristiques.*
5. *Soit s la réflexion d'hyperplan F. Déterminer la matrice de s dans la base B*
6. *Calculer la distance entre F et le vecteur* $w = (1, 1, 1)$
7. *Soit* $t = ros$ *(la composée de r et s). Calculer l'adjoint de t.(On pourra donner le résultat en fonction de r et s).*
8. *Soit* s_1 *la réflexion d'hyperplan* $H = vect(w) + ker(u)$. *L'application* $s_2 = ros_1$ *est elle une reflexion?*
9. *Déterminer les matrices de* s_1 *et* s_2 *dans la base B*
10. *Montrer que r se décompose en composée de deux réflexions qu'on déterminera par leur matrices.*