UNIVERSITE IBN TOFAIL
S3, ENSAK

Algèbre bilinéaire **Octobre 2012**

EXERCICE 1 *Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4)$ une base orthonormée de E, et $F = vect(e_1 + e_2, e_1 - e_2 + e_4, e_3 - e_4)$.*

1. *Donne une base et la dimension de F.*
2. *Trouver une base orthonormée de F.*
3. *Quelle est la dimension de $F^{\perp}$.*
4. *Les espaces F et $F^{\perp}$ sont-ils supplémentaires?*

EXERCICE 2 *On définit sur $M_4(\mathbb{R})$, l'application $(A|B) = Tr({}^tAB)$, et on considère $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}); Tr(M) = 0\}$.*

1. *Montrer que F est un hyperplan de $M_4(\mathbb{R})$.*
2. *Donner une base orthonormée de F*
3. *Donner $F^{\perp}$.*

EXERCICE 3 *Soit E l'ensemble des fonctions continues et 2π périodiques définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit sur E l'application $(f|g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$.*

1. *Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E*
2. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on défini e_k sur $\mathbb{R}$ par $e_k(x) = exp(ikx)$. Vérifier que les e_k forment une famille orthonormée.*
3. *Soit n un entier naturel non nul et $F_n = vect\{e_k, -n \leqslant k \leqslant n\}$. Quelle est la dimension de F_n?*
4. *Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $g \in F_n$ tel que $f - g \in F_n^{\perp}$.*

UNIVERSITE IBN TOFAIL
S3, ENSAK

Algèbre bilinéaire **Examen de decembre 2012**

EXERCICE 1 *Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4)$ une base orthonormée de E, et F le sev d'équations dans $\mathcal{B}$:* $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - 2y + 3z + t = 0 \end{cases}$

1. *Trouver une base orthonormée de F.*
2. *Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.*
3. *Calculer $d(\vec{e}_1 - e_2, F)$.*
4. *Donner une base orthonormée de $F^\perp$*
5. *Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport à F*

EXERCICE 2 *Soit E un eve et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Etudier dans les cas suivants la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A*

1. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ plan de reflexion?

EXERCICE 3 *On considère le système S suivant:* $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

1. *Le système admet -il des solutions?*
2. *Donner la meilleure approximation d'une solution de S au sens des moindres carrés*

EXERCICE 4 *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E.*

1. *Ecrire la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation d'angle $\pi/4$ et d'axe orienté par $i + 2j - k$.*
2. *Décomposer la rotation en produit de deux réflexions.*

Université Ibn Tofail, Ensa Kénitra
Rattrapage, Algèbre S3

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tMM = I_n$.

1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2. On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = Tr({}^tAB)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$. **4.** Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$.
On note $A_1, A_2, ..., A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_iA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?
b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, ..., E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_iE_i$.
c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1t}AAP = P^{-1t}BBP = D^2$.
b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.