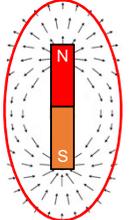


2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.2 Conservation du flux magnétique:
 Considérons un volume entourant un point quelconque. à l'intérieur du volume il y a au moins une « charge magnétique positive » ainsi qu'une « charge magnétique négative ».



La charge totale à l'intérieur est nulle. Par analogie on applique le théorème de Gauss pour les champs magnétiques:

$$\Phi(\vec{B}) = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \propto \sum q_i = 0$$

1^{ère} conclusion: le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul.

2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.3 Quatrième équation de Maxwell:
 On peut utiliser le théorème de divergence pour obtenir la forme locale du « théorème de Gauss magnétique »:

$$\Phi(\vec{B}) = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{B} \cdot dV = 0$$

Forme locale du " théorème de Gauss magnétique "

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = 0}$$

Quatrième équation de Maxwell

2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.4 Le vecteur potentiel magnétique:
 En utilisant une des identités vectorielles : $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$
 Un champ rotationnel ne diverge pas!

Comparons cette équation avec la 4^{ème} équation de Maxwell:

$$\text{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{B} = \text{rot} \vec{A}}$$

La quantité \vec{A} est appelé le **vecteur potentiel magnétique**.
 De même que le **champ électrique dérive** d'un **potentiel électrostatique scalaire**, le **champ magnétique dérive** d'un **potentiel vectoriel**: le **potentiel vecteur**.

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}}$$

2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.4 Le vecteur potentiel magnétique:
 Pour calculer le potentiel vecteur, nous repartons de l'expression générale du champ magnétique:

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{r}}{r^3} dV}$$

avec: $\vec{r} = \overline{PM}$

Faisons apparaître le terme $\frac{\vec{r}}{r^3}$ sous la forme d'un gradient:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{pmatrix} = - \frac{\vec{r}}{r^3}$$

2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.4 Le vecteur potentiel magnétique:

Calcul: $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$

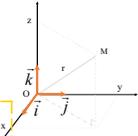
En coordonnées cartésiennes $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{k}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
 $r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (2x) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

(uⁿ)['] = n.uⁿ⁻¹.u['] $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

de la même façon $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$



2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.4 Le vecteur potentiel magnétique:

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$
 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$
 $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{k}$

$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = - \frac{\vec{r}}{r^3}$

$\boxed{\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{r}}{r^3}}$

2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.4 Le vecteur potentiel magnétique:

On peut donc écrire le champ magnétique sous la forme:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{r}}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dV$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j}(P) \wedge \left[-\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{j}(P) dV$$

Utilisons une autre identité vectorielle:

$$\text{rot}(f \vec{A}) = f \text{rot} \vec{A} + (\text{grad} f) \wedge \vec{A}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{A}$$

2.1. Le flux magnétique à travers une surface fermée

2.1.4 Le vecteur potentiel magnétique:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{r} \vec{j} \right) - \underbrace{\left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla} \wedge \vec{j}(P)}_0$$

Le 2ème terme de l'équation est nul car $\vec{\nabla}$ n'agit pas sur $\vec{j}(P)$.

Ce qui conduit pour le champ magnétique à:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{\vec{j}(P)}{r} \right] dV = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{r} dV \right)$$

On aboutit donc à la définition du potentiel vecteur :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{r} dV$$

2.2. Le théorème d'Ampère

André-Marie Ampère, 1775 - 1836, est un mathématicien et physicien français. Il inventa le premier télégraphe électrique et, avec François Arago, l'électroaimant, et il énonça en 1827 la théorie de l'électromagnétisme. Son nom a été donné à l'unité internationale de l'intensité du courant électrique : l'ampère.



2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

On a déjà vu que le champ magnétique d'une distribution de courant peut être calculé en utilisant la loi de Biot-Savart:

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

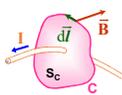
On peut aussi imaginer une distribution de courants si complexe, qu'il faut utiliser un ordinateur pour trouver le champ.

Cependant, si la distribution de courant présente une certaine symétrie, on peut utiliser le théorème d'Ampère pour trouver le champ beaucoup plus facilement.

2.1. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

Le théorème d'Ampère relie la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé (C) au courant total traversant la surface (S_C) s'appuyant sur ce contour.



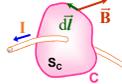
La forme intégrale:

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 I_{\text{int}}$$

2.1. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

Forme locale du théorème d'Ampère:

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}$$


• Théorème de Stokes (ou du rotationnel):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S_C)} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S_C)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On obtient la forme locale du théorème d'Ampère, qu'on appelle : La 2ème équation de Maxwell.

$$\Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

2.1. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

Équation de Poisson en électromagnétisme:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

D'où: $\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

Soit: $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$

C'est l'équation de Poisson en électromagnétisme (analogie avec celle de l'électrostatique:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Démonstration

- Si le contour fermé n'entoure pas le conducteur:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_1 \int_a^b d\ell + (0) \int_b^c d\ell + (-B_2) \int_c^d d\ell + (0) \int_d^a d\ell$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} (r_1 \theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} (r_2 \theta) + 0 = 0$$

- Contour fermé quelconque $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell \cos \phi$

$$d\ell \cos \phi = r d\theta \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

Pour comprendre la signification du théorème d'Ampère, on peut l'appliquer à la configuration de courants montré dans la figure suivante.

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

Le contour fermé (C) entoure seulement deux des trois courants.

Pour appliquer le théorème d'Ampère, on divise le parcours (C) en éléments vectoriels $d\vec{\ell}$ orientés dans le sens du parcours.

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

Puisque les courants sont perpendiculaires au plan de l'écran, on sait que le champ magnétique crée au point ou se situe l'élément est orienté dans le plan de l'écran.

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.1. Le théorème d'Ampère : Définition

Dans la figure, on a orienté le champ arbitrairement à un angle θ par rapport à l'élément $d\vec{\ell}$.

Le théorème d'Ampère s'écrit $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell \cdot \cos \theta = \mu_0 I_{\text{int}}$ donc:

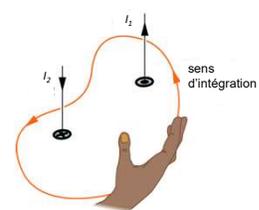
2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.2. Le théorème d'Ampère : Conventions

On *choisit* le sens d'intégration

Pour déterminer le signe des courants, on applique la **régle de la main droite**.

Les courants qui **vérifient** la règle sont considérés comme **positifs**, les autres sont considérés comme négatifs



Dans ce cas: $\sum I_i = +I_1 - I_2$

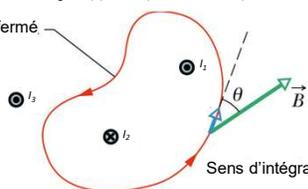
2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.2. Le théorème d'Ampère : Conventions

$$I_{\text{int}} = I_1 - I_2 \implies \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell \cdot \cos \theta = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

Les contributions au champ qui proviennent du courant I_3 s'annulent. Donc I_3 n'apparaît pas dans l'équation.

Contour fermé



Sens d'intégration

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.3. Le théorème d'Ampère : Propriété importante

Considérons un fil infini:

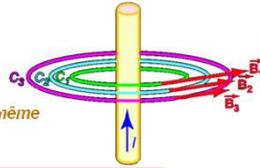
- Plus loin du fil : **B diminue**

$$B_3 < B_2 < B_1$$

- Mais la **circulation** est la **même** sur les **trois courbes**

$$\oint_{(C_1)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 = \oint_{(C_2)} \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = \oint_{(C_3)} \vec{B}_3 \cdot d\vec{\ell}_3 = \mu_0 I_{\text{int}}$$

- Circulation : **grandeur qui se conserve !**



2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.4. Le théorème d'Ampère : Remarques

- Le théorème d'Ampère
 - Ne donne **pas la direction**
 - Ne donne **pas le sens**
 - Nous renseigne **uniquement** sur **l'intensité** de \vec{B}
- On a intérêt à choisir, autant que possible :
 - Un contour dont le **périmètre** est facile à calculer
 - Un contour tel que : $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$
 - Produit scalaire \implies Calcul simplifié

2.2. Le théorème d'Ampère

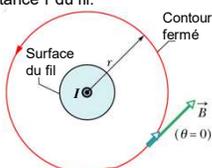
2.2.5. Le champ crée par un fil infini

Considérons un long fil conducteur rectiligne, parcouru par un courant uniforme I .

Le champ magnétique a une symétrie cylindrique : le champ est orienté perpendiculairement au fil, avec le même module B en tout point situé à une même distance r du fil.

On utilisera ces symétries pour simplifier l'intégrale dans le théorème d'Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \cdot d\ell \cdot \cos \theta = \mu_0 I$$

$$\oint B \cdot d\ell \cdot \cos \theta = \oint B \cdot d\ell = \mu_0 I$$


2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.5. Le champ crée par un fil infini

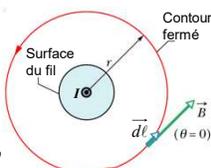
Le contour d'intégration est un cercle. Donc r est constant et, selon la symétrie identifiée, B est aussi constant:

$$\oint B \cdot d\ell = B \oint d\ell = B \cdot (2\pi r)$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

ou, en forme vectoriel: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$



2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.5. Le champ créé par un fil infini

• **Le champ à l'intérieur d'un long fil rectiligne:**

Encore, on peut profiter de ces symétries pour simplifier l'intégrale dans le théorème d'Ampère:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Le courant I_{int} à l'intérieur du contour fermé dépend du rayon du contour:

$$I_{\text{int}} = j \cdot S_{\text{int}}$$

j = densité de courant
 S_{int} = Surface à l'intérieur du contour

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.5. Le champ créé par un fil infini

Rappelez la définition de la densité de courant (Cours d'Electricité):

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot S \rightarrow j = I / S = I / \pi R^2$$

Donc:

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot S_{\text{int}} = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = I \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Retournons au théorème d'Ampère:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{int}}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \left(\frac{r}{R}\right)^2 \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.5. Le champ créé par un fil infini

• **Le champ à l'extérieur d'un long fil rectiligne:**

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot S = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi R^2 = I$$

Retournons au théorème d'Ampère:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 I$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Solution trouvée précédemment

2.2. Le théorème d'Ampère

2.2.5. Le champ créé par un fil infini

Champ intérieur: quand $r=R$
 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

Champ extérieur:
 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R}$

2.3. Relation de continuité du champ magnétique

Soit une distribution surfacique de courant \vec{j}_s séparant l'espace en deux régions 1 et 2.

Considérons une surface fermée fictive, traversant la surface.

La conservation du flux magnétique à travers cette surface s'écrit:

$$\Phi(\vec{B}) = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

2.3. Relation de continuité du champ magnétique

$$\Rightarrow \iint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_L)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Où S_L est la surface latérale. Lorsqu'on fait tendre cette surface vers zéro (S_1 tend vers S_2), on obtient:

$$\iint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{(S_1=S_2)} (\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1}) \cdot dS \vec{n}_{12} = 0$$

2.3. Relation de continuité du champ magnétique

Ce résultat étant valable quelque soit la surface S choisie, on vient donc de démontrer que:

$$(\vec{B}_{2N} - \vec{B}_{1N}) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

$$B_{2N} = B_{1N}$$

2.3. Relation de continuité du champ magnétique

Pour la composante tangentielle, nous allons utiliser le théorème d'Ampère. Considérons le contour d'Ampère (ABCD) suivant :

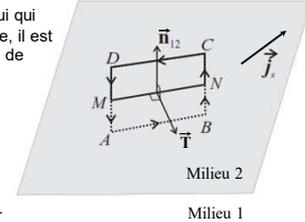
$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Le courant I est celui qui circule sur la surface, il est défini par la densité de courant surfacique:

$$I_s = \iint_{\text{surface}} \vec{j}_s \cdot d\vec{S}$$

où $(\vec{MN}, \vec{n}_{12}, \vec{T})$

est un trièdre direct.



2.3. Relation de continuité du champ magnétique

$$BC = DA \rightarrow 0 : \int_{(MN)} (\vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2}) d\vec{\ell} = \int_{(MN)} (\mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{T}) d\ell$$

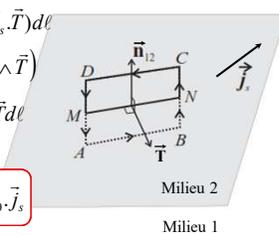
Puisque MN est quelconque, on doit avoir:

$$(\vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2}) d\vec{\ell} = (\mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{T}) d\ell$$

$$= (\vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2}) d\ell (\vec{n}_{12} \wedge \vec{T})$$

$$= [(\vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2}) \wedge \vec{n}_{12}] \vec{T} d\ell$$

$$(\vec{B}_{T1} - \vec{B}_{T2}) \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 \vec{j}_s$$



2.3. Relation de continuité du champ magnétique

En résumé, à la traversée d'une surface traversée par un courant:

- la **composante normale** du champ magnétique reste **continue**,
- la **composante tangentielle** du champ magnétique est **discontinue**.

2.4. Le dipôle magnétique

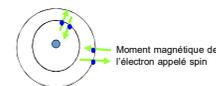
• De même que la notion de dipôle électrique est importante car souvent utilisée pour modéliser le comportement de la matière du point de vue électrique, il est important également de faire apparaître la notion de dipôle magnétique.

• Comme dans le cas électrique, la notion de dipôle magnétique fait référence à une situation où l'observation du champ magnétique ou du potentiel vecteur se fait loin du circuit qui leur donne naissance.

2.4. Le dipôle magnétique

Origine atomique du magnétisme

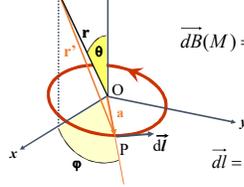
- Chaque électron est un petit aimant
- Les électrons ont tendances à s'associer deux à deux avec un magnétisme contraire.
- Ce qui **annule** l'effet magnétique dans la matière.
- Lorsque plusieurs électrons de la dernière couche ont un magnétisme dans le **même sens**, comme ceux de l'ion de fer dans la **magnétite**, alors nous avons un **aimant**.



2.4. Le dipôle magnétique

Intéressons nous à la boucle de courant (spire) ci-dessous:

Le **champ magnétique** crée par l'élément $d\vec{l}$ en un point M du plan (xOz):



$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}'}{r'^3}$$

$$d\vec{l} = dOP = a.d\varphi \vec{e}_\varphi = a.d\varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.4. Le dipôle magnétique

$$\vec{r}' = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} r \sin \theta - a \cos \varphi \\ 0 - a \sin \varphi \\ r \cos \theta - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta - a \cos \varphi \\ -a \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$r'^3 = \left[(r \sin \theta - a \cos \varphi)^2 + (a \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$r'^3 = \left[r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi \right]^{-\frac{3}{2}}$$

2.4. Le dipôle magnétique

En faisant un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{a}{r}$,

$$\text{on obtient : } \frac{1}{r'^3} \approx \frac{1}{r^3} \left[1 + 3 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi \right]$$

On calcule le produit vectoriel :

$$d\vec{l} \wedge \vec{r}' = a.d\varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \sin \theta - a \cos \varphi \\ -a \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{r}' = d\varphi \begin{pmatrix} a.r.\cos \varphi \cos \theta \\ a.r.\sin \varphi \cos \theta \\ a^2 - a.r.\cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix}$$

2.4. Le dipôle magnétique

On reprend l'expression de $d\vec{B}(M)$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}'}{r'^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left(1 + 3 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi \right) d\varphi \begin{pmatrix} a.r.\cos \varphi \cos \theta \\ a.r.\sin \varphi \cos \theta \\ a^2 - a.r.\cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix}$$

Nous allons intégrer cette expression pour φ variant entre 0 et 2π . Sachant que :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \pi$$

2.4. Le dipôle magnétique

L'expression du champ est:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 3\pi a^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ 2\pi a^2 - 3\pi a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

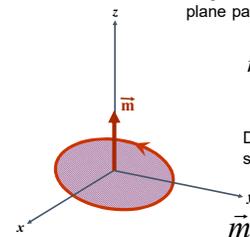
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 3 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ 2 - 3 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 3 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ 3 \cos^2 \theta - 1 \end{pmatrix}$$

2.4. Le dipôle magnétique

On définit alors le **moment dipolaire magnétique** d'une spire supposée plane par:

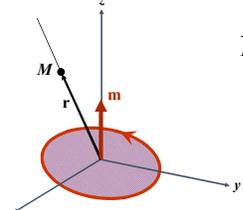
$$\vec{m} = I \iint_S d\vec{S} = I \vec{S}$$

Dans ce cas pour une spire de rayon a:



$$\vec{m} = I \pi a^2 \vec{e}_z = m \vec{e}_z$$

2.4. Le dipôle magnétique

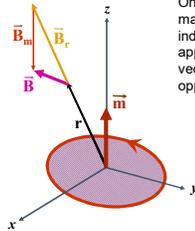


$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 3 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ 3 \cos^2 \theta - 1 \end{pmatrix}$$

$$m = I \cdot S = I \pi a^2$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} 3 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} & 0 \\ 3 \cos^2 \theta & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.4. Le dipôle magnétique

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_r(M) + \vec{B}_m(M)$$


On peut remettre cette expression du champ magnétique sous forme vectorielle indépendante du choix de repère. On voit apparaître une composante le long du vecteur \vec{r} et une deuxième dans la direction opposée au moment dipolaire magnétique.

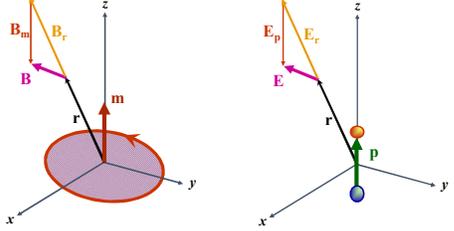
$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r}$$

$$\vec{B}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

2.4. Le dipôle magnétique

Analogie avec le champ électrique créé par un dipôle électrique.

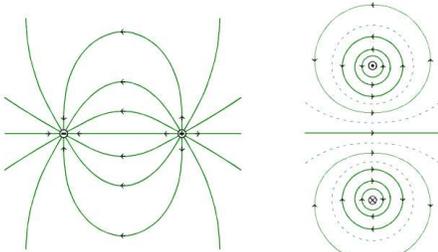


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

2.4. Le dipôle magnétique

Analogie avec le champ électrique créé par un dipôle électrique.



dipôle électrostatique dipôle magnétique

Chapitre 2: Lois fondamentales de la magnéto-statique – Théorème d'Ampère

FIN DU CHAPITRE 2