Université Ibn Tofail
Écoles Nationale des Sciences Appliquées

CPI 1 : S2

Analyse fondamentale
Séries de Fourier

M. O. ABOUTAFAIL

1. Définitions et premiers résultats.

Définition : Série trigonométrique

On appelle série trigonométrique réelle toute série de fonctions de la forme :

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

avec $x \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}_+^*$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in N$.

Le problème est de déterminer le domaine de convergence de la serie (1).

Remarque

Supposons que la serie (1) converge et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\cos(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \cos(n\omega x) \quad \text{et} \;\; \sin(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \sin(n\omega x),$$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + \dfrac{2k\pi}{\omega})$ et donc f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

En conclusion, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La série trigonométrique (1) converge dans $\mathbb{R}$.
2. La série trigonométrique (1) converge dans $[0, \dfrac{2\pi}{\omega}]$.

Proposition 1

Si les séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (1) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc elle est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

On a le résultat grâce à l'inégalité :

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Proposition 2

Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour $x \neq \dfrac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :

On a le résultat grâce au théorème d'**Abel** (généralisé).

Représentation complexe d'une série trigonométrique : On a $\cos(n\omega x) = \dfrac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}$ et $\sin(n\omega x) = \dfrac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$,donc

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}.$$

On Posant $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ et $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} (1) &= c_0 + \sum_{1}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} \\ &= c_0 + \sum_{1}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}. \end{aligned}$$

Ona a donc :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique.

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

Alors :

Coefficients d'une série trigonométrique : Cas réel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Coefficients d'une série trigonométrique : Cas complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarques

✓ Si f est une fonction paire, alors :

$$a_n = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx; \text{ et } b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si f est une fonction paire 2π-periodique, alors :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx; \text{ et } b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarques

✓ Si f est une fonction impaire, alors :

$$b_n = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx; \text{ et } a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si f est une fonction impaire 2π-periodique, alors :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx; \text{ et } a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Séries de Fourier

Dans cette partie, on ne va considérer que les fonctions de période 2π.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période $T = 2\pi$ (donc $\omega = 1$).
On suppose que $\int_I |f(t)|dt$ converge sur un intérvalle $I = [\alpha, \alpha + 2\pi]$ de longeur 2π, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition

On appelle série de Fourier associée a la fonction f, la série trigonométrique

$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

avec $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Deux questions se posent :

- La série de Fourier $S(f)$ associé a f est-elle convergente ?.

Deux questions se posent :

- La série de Fourier $S(f)$ associé a f est-elle convergente ?.
- En cas de convergence, peut-on dire que la série $S(f)$ converge vers f ?.

Deux questions se posent :

- La série de Fourier $S(f)$ associé a f est-elle convergente ?.
- En cas de convergence, peut-on dire que la série $S(f)$ converge vers f ?.

Le théorème de Dirichlet et le théorème de Jordan répondent à ces deux questions. Avant d'entamer ces théorèmes, il convient de repréciser les différents types de notations et définitions qui interviennent dans les démonstrations.

Définitions

- Une fonction f est dite admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 existent.

Définitions

- Une fonction f est dite admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 exisent.
- Nous noterons par $f(x^+)$ la limite à droite en x et $f(x^-)$ la limite à gauche en x.

Définitions

- Une fonction f est dite admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 existent.
- Nous noterons par $f(x^+)$ la limite à droite en x et $f(x^-)$ la limite à gauche en x.
- Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceau sur $[a, b]$ si f est continue sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points qui sont des points de première espèce.

Définitions

- Une fonction f est dite admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 exisent.
- Nous noterons par $f(x^+)$ la limite à droite en x et $f(x^-)$ la limite à gauche en x.
- Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceau sur $[a, b]$ si f est continue sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points qui sont des points de première espèce.
- Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite lisse (de classe C^1) par morceau sur $[a, b]$ si f et f' sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

Théoreme de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Les discontinuités de f (s'il existe) sont de première espèce et sont en nombre fini.

Théoreme de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Les discontinuités de f (s'il existe) sont de première espèce et sont en nombre fini.
2. f admet en tout point une dérivée a droite et une dérivée a gauche.

Alors la série de Fourier associée a f est convergente et on a :

$$S(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si f est continue en x} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{si f est discontinue en x.} \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle ou la fonction f est continue.

Application : Soit $f :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, définie par $f(x) = x$.

La fonction f vérifié les conditions de Dirichlet, en effet :

- Les points de discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ qui sont de première espèce car $f(\pi^+) = \pi$ et $f(\pi^-) = -\pi$.
- f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :

$$\lim_{x \longrightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1 \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1,$$

Donc f est développable en série de Fourier.

Or f est impaire, alors :

$$a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad et \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 2 \cdot \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ainsi, la série de Fourier converge vers f et on a :

$$f(x) = 2\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$

Theorème de Jordan

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ (i.e f est bornée).
2. On peut partager l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ en sous-intervalles $[\alpha_1, \alpha_2[$, $[\alpha_2, \alpha_3[$..., $[\alpha_{n?1}, \alpha_n]$, avec $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_n = \alpha + 2\pi$ tels que la restriction de f a $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ soit monotone et continue.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$S(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si f est continue en x} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{si f est discontinue en x.} \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Application : Soit $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, définie par $f(x) = |x|$.
La fonction f vérifié les conditions de Jordan, en effet :

- On a $|f(x)| \leq \pi$.
- La restriction de f sur $[-\pi, 0]$ est continue décroissante, et la restriction de f sur $[0, \pi]$ est continue croissante.

Donc f est développable en série de Fourier.
Or f est paire, alors :

$$b_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si n pair} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si n impair} \end{cases}.$$

Ainsi, la série de Fourier converge vers f et on a :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\sum_{1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

Puisque f est continue, la convergence est uniforme.

3.Égalité de Parseval

Théorème : (Égalité de Parseval)

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a pour α réel quelconque :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f^2(x)dx = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n^2|.$$

En particulier, Si f est 2π-périodique, alors :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Remarque :

$$f \text{ paire } \Rightarrow f^2 \text{ paire } \Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)dx.$$

$$f \text{ impaire } \Rightarrow f^2 \text{ paire } \Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)dx.$$