Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Dans tout le cours, les fonctions que nous considèrerons seront définies sur une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Notation importante : Le symbole $\mathbf{K}$ désignera toujours indifféremment le corps $\mathbf{R}$ ou le $\mathbf{C}$, muni de sa valeur absolue habituelle.

2.1 Convergence simple

2.1.1 Définition de la convergence simple d'une suite de fonctions

Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbf{K}$ définies toutes sur E et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Définition 2.1.1 (Ensemble de convergence, convergence simple)
(i) On appelle *ensemble de convergence* le sous ensemble E' de E formé des $x \in E$ tels que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
(ii) Soit F une partie de E et $f : F \to \mathbf{K}$ une fonction ; on dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement* vers f sur F si, pour tout $x \in F$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Remarque 2.1.2 (i) Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur $F \subset E$, alors, bien sûr, F est une partie de l'ensemble de convergence E' de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
(ii) Pour tout $x \in E'$, soit $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Alors f est une fonction définie sur E' et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur E'.

(iii) Pour une partie F de E et une fonction $f : F \to \mathbf{K}$ on a : $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur F si et seulement si : pour tout $x \in F$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Exemple 2.1.3 (i) Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

L'ensemble de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On observera que f est discontinue bien que toutes les fonctions f_n soient continues.
(ii) Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

L'ensemble de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc $[0, 1]$ tout entier et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(iii) Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n + 1}{x^2 + 1}$. Pour $|x| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Pour $x = 1$, on a $x^n = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$. Pour $x = -1$, on a $x^n = (-1)^n$ et donc $f_n(-1) = \dfrac{(-1)^n + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{2}{x^2 + 1}$ si n est pair et $f_n(-1) = 0$ si n est impair. Ceci montre que $\lim_{n\in\mathbf{N}} f_n(-1)$ n'existe pas. Si $|x| > 1$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente et $\lim_{n\in\mathbf{N}} f_n(x)$ n'existe pas. En conclusion, l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est $]-1,1]$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f :]-1,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(iv) Soit $f_n : [0,\pi/2] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Comme $|\sin t| \leq 1$ pour tout t, on a $|f_n(x)| \leq 1/n$ pour tout x. Ceci montre que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction 0 sur $[0,\pi/2]$.
(v) Soit $g_n : [0,\pi/2] \to \mathbf{R}$ la dérivée la fonction f_n définie en (iv) plus haut. Alors $g_n(x) = n\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cos nx$ ne converge pour aucune valeur de x. L'ensemble de convergence est donc vide ; a fortiori, g_n ne converge pas vers la dérivée $f' = 0$ de la limite $f = 0$ de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
(vi) Soit $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$. Alors f_n converge simplement vers la fonction $f = 0$ sur $[0,1]$. On observera que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2n+2}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1/2$ alors que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

2.1.2 Définition de la convergence simple d'une série de fonctions

Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $u_n : E \to \mathbf{K}$ définies toutes sur E et à valeurs dans $\mathbf{K}$. On note S_n la fonction définie sur E par les sommes partielles :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Définition 2.1.4 Soit E' l'ensemble de convergence de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et notons $S(x) := \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ pour tout $x \in E'$. On dit que la *série* de terme général u_n converge simplement vers S sur E' et on écrit $\sum_n u_n(x) = S(x)$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ pour tout $x \in E'$

Remarque 2.1.5 (i) La série de terme général u_n converge simplement vers S si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers S.
(ii) La série de terme général u_n converge simplement vers S si et seulement si, pour tout $x \in E'$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}$ tel que

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Exemple 2.1.6 (i) **(Série géométrique)** Soit $u_n : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(z) = z^n$. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ on a

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

et $S_n(1) = n$. L'ensemble de convergence de la série de terme général u_n est donc $E' = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z| < 1\}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \dfrac{1}{1-z}$ pour tout z tel que $|z| < 1$.
(ii) Soit $u_n : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \sin^2(x)\cos^n(x)$. La série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers la fonction $S : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}$ défine par

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{1 - \cos x} & \text{si } x \in]0, \pi/2[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.2 Convergence uniforme

On a vu précedemment que, si u_n est une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement continue ; de plus, la suite des dérivées des u_n (quand elles existent) ou de leurs intégrales ne converge pas nécessairement la limite vers la dérivée de f (qui peut même ne pas exister) ou son intégrale. Une notion de convergence va nous permettre de remédier à ce problème : la convergence uniforme. Ce sera une notion-clé dans ce cours.

2.2.1 Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbf{K}$. Soit E' l'ensemble de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et, pour tout $x \in E'$, soit $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Définition 2.2.1 (Convergence uniforme) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément* vers f sur une partie F de E' si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $x \in F$ et tout $n \geq N$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2.2 (i) La différence entre la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et la convergence simple est que le N de la définition précedente ne dépend que de ε et non de x (comparer avec la Remarque 2.1.2.iii).
(ii) Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur F, alors il évident que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur F. La réciproque est fausse, comme le montre l'Exemple 2.2.3.ii plus bas.
(iii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur F si et seulement si : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que $\sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
(iv) La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur F si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

c-à-d si et seulement si la suite numérique $(\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Exemple 2.2.3 (i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 2\pi]$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f = 0$ sur $[0, 2\pi]$; en effet,

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\frac{\sin x}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}(\sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)|) = 0$.

(ii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$; on a vu (Exemple 2.1.3.ii) que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $[[0,1]$ définie par $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(1) = 1$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1;$$

La suite $(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend donc pas vers 0 et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers f.

2.2.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 2.2.4 (Convergence uniforme de séries) On dit qu'une série de fonctions de terme général u_n *converge uniformément* sur F vers une fonction S si la suite de fonctions formée par les séries partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur F vers S ; en d'autres termes, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sup_{x\in F} |\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - S(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Remarque 2.2.5 Si une série de fonctions de terme général u_n converge uniformément vers une fonction S, elle converge simplement vers S. La réciproque est fausse (voir Exemple 2.2.6.i plus bas).

Exemple 2.2.6 (i) On considère la série de fonctions sur $\mathbf{R}$ de terme général $u_n(x) = x^n$; son domaine de convergence est $]-1,1[$ et cette série converge simplement vers la fonction $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. La convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$; en effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x^n - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|;$$

comme

$$\sup_{x\in]-1,1[} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = +\infty,$$

il s'ensuit que $(\sup_{x\in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0.

(ii) Soit $a \in]0,1[$. La série précedente converge uniformément vers S sur $[-a,a]$. En effet,

$$\sup_{x\in[-a,a]} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-a,a]} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

2.2.3 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Il existe un critère de Cauchy pour la convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions. Comme pour les suites ou séries numériques, l'utilité de ce critère est qu'il permet de montrer la convergence sans connaître explicitement la limite.

Théorème 2.2.7 ***(Critère de Cauchy uniforme)*** *(i) Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur E converge uniformément sur une partie F de E si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous $p, q \geq N$, on a*

$$\sup_{x\in F} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

(ii) Une série de fonctions sur E de terme général u_n converge uniformément sur une partie F si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous $p > q \geq N$, on a

$$\sup_{x\in F} |S_p(x) - S_q(x)| = \sup_{x\in F} |\sum_{k=q+1}^{p} u_k(x)| \leq \varepsilon.$$

Démonstration
(i) Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur F vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$\sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$$

Il s'ensuit que, pour tout $p, q \geq N$ et tout $x \in F$ on a, par l'inégalité triangulaire,

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci signifie que

$$\sup_{x\in F} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Réciproquement, supposons pour, tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $p, q \geq N$, on a

$$\sup_{x \in F} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

Pour tout $x \in F$ fixé, on a donc

$$(*) \qquad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad p, q \geq N$$

et la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{K}$. D'après le critère de Cauchy, $f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ existe donc pour tout $x \in F$. En faisant $q \to +\infty$ dans l'inégalité $(*)$ plus haut, on a

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad p \geq N$$

et donc

$$\sup_{x \in F} |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad p \geq N.$$

Ceci montre la convergence uniforme de la suite f_n vers f.
(ii) L'assertion découle de l'assertion (i) en prenant $f_n := S_n$. ■

Corollaire 2.2.8 *Si une série de fonctions sur E de terme général u_n converge uniformément sur une partie F, alors* $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in F} |u_n(x)| = 0$

Démonstration On a

$$\sup_{x \in F} |u_n(x)| = \sup_{x \in F} |S_n(x) - S_{n-1}(x)|.$$

D'après le critère de Cauchy (Théorème 2.2.7), la suite $(\sup_{x \in E'} |u_n(x)|)_{n \in \mathbf{N}}$ tend donc vers 0. ■

Remarque 2.2.9 Comme pour les séries numériques, on utilise souvent la contraposée de ce corollaire : si la suite $(\sup_{x \in F} |u_n(x)|)_{n \in \mathbf{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_n ne pas converge uniformément sur F. De même que pour les séries numériques, la réciproque n'est pas nécessairement vraie : si $(\sup_{x \in F} |u_n(x)|)_{n \in \mathbf{N}}$ tend uniformément vers 0, la série de terme général u_n ne pas converge toujours uniformément (ou même simplement ; voir Example 2.2.10.iii plus bas).

Exemple 2.2.10 (i) La série de terme général $x \mapsto u_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1, 1[$; on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in[0,1[} |u_n(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1.$$

On retrouve ainsi le fait, déjà vu précédemment Exemple 2.2.6.i), que cette série ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$.
(ii) La série de terme général $x \mapsto u_n(x) = \dfrac{x}{x+n^2}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$: pour chaque $x \geq$, on a $\frac{x}{x+n^2} \leq x\dfrac{1}{n^2}$ et la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente ; d'autre part, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{x}{x+n^2} = 1$$

car $x \mapsto \dfrac{x}{x+n^2}$ est croissante et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+n^2} = 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = 1 \neq 0.$$

Ceci montre que la série ne converge pas uniformément sur $[0, \infty[$.
(iii) La série de terme général constant $x \mapsto u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ ne converge pour aucun $x \in \mathbf{R}$. D'autre part, la suite $\sup_{x\in\mathbf{R}} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.

2.3 Convergence normale d'une série de fonctions

On dispose, pour les séries de fonctions, d'une notion de convergence impliquant la convergence uniforme et souvent facile à vérifier : la convergence normale.

Définition 2.3.1 (Convergence normale d'une série de fonctions) On dit qu'une série de fonctions de terme général u_n *converge normalement* sur un ensemble E s'il existe une série numérique de terme positif a_n qui soit convergente et telle que $|u_n(x)| \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in E$.

Remarque 2.3.2 Une série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur E si et seulement la série numérique de terme général $\sup_{x\in E}|u_n(x)|$ est convergente

Théorème 2.3.3 ***(La convergence normale implique la convergence uniforme)*** *Si une série de fonctions de terme général* u_n converge normalement *sur un ensemble* E, *alors elle converge uniformément sur* E.

Démonstration On va vérifier le critère de Cauchy pour les séries de fonctions (Theorème 2.2.7). Par hypothèse, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $a_n \geq 0$ telle que la série $\sum_n a_n$ est convergente et telle que $\sup_{x\in E}|u_n(x)| \leq a_n$ pour tout n.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série numérique $\sum_n a_n$ est convergente, elle satisfait au critère de Cauchy ; il existe ainsi $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sum_{k=q+1}^{p} a_k \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad p > q \geq N.$$

On a alors

$$\sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x\in E}|u_k(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad p > q \geq N.$$

D'autre part, par l'inégalité triangulaire, on a, pour tous $p > q \in \mathbf{N}$:

$$\sup_{x\in E}|\sum_{k=q+1}^{p} u_k(x)| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x\in E}|u_k(x)|.$$

Il s'ensuit des deux inégalités précédentes que

$$\sup_{x\in E}|\sum_{k=q+1}^{p} u_k(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad p > q \geq N.$$

La série de terme général u_n vérifie donc le critère de Cauchy.■

Remarque 2.3.4 Une série uniformément convergente n'est pas nécessairement normalement convergente (voir Exemple 2.3.5.ii plus bas ou Exercice 2.6.21).

Exemple 2.3.5 (i) Soit $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |u_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente ; la série de terme général u_n est ainsi normalement convergence et donc uniformément convergente.
(ii) On considère la série de fonctions sur $\mathbf{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ de terme général donné par la fonction constante $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Par le critère de Leibniz (voir le rappel en Remarque 3.5.1 ou aussi l'Exercice 2.6.15), la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente ; la série de terme général u_n est donc uniformément convergente sur $\mathbf{R}$ ou I. Cependant, comme la série de terme général $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ n'est pas convergente, la série de fonctions considérée n'est pas normalement convergente.

Remarque 2.3.6 L'étude de la convergence d'une *série* de terme général u_n est l'étude de la convergence de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Ceci permet, dans une certaine mesure, de ramener à l'étude des séries à celle des suites. Réciproquement, on peut exploiter les critères de convergence uniforme d'une série (comme la convergence normale) pour montrer la convergence uniforme d'une *suite* de fonctions. C'est le procédé de "transformation" d'une suite en série qui a déjà été vu pour les suites numériques. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur une partie E de $\mathbf{K}$. On considère la suite définie par $u_0 = f_0$ et $u_n := f_n - f_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Alors la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est

$$S_n = f_0 + (f_1 - f_0) + \cdots + (f_n - f_{n-1}) = f_n.$$

La convergence (simple ou uniforme) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}})$ équivaut donc à celle de la série de terme général u_n.

2.4 Propriétés des limites uniformes de suites

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur une partie E de $\mathbf{K}$ qui converge uniformément sur E vers une fonction $f : E \to \mathbf{K}$; nous allons voir que, dans une certaine mesure, les propriétés de régularité des f_n (continuité, dérivabilité, etc) sont héritées par f.

On rappelle qu'une fonction $f : E \to \mathbf{K}$ est continue en $x_0 \in E$ si :

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = f(x_0),$$

ou, de manière équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ avec $|x - x_0| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

2.4.1 Continuité de limites uniformes de fonctions continues

Théorème 2.4.1 ***(Continuité d'une limite uniforme)*** *Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et $f_n : E \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions uniformément convergentes vers une fonction $f : E \to \mathbf{K}$. Soit $x_0 \in E$. Si les f_n sont continues en x_0, alors f est continue en x_0. En particulier, si les f_n sont continues sur E, alors f est continue sur E.*

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur E vers f, il existe N tel que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 \qquad \text{pour tout} \quad x \in E \text{ et} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N;$$

en particulier, on a

$$(*) \qquad |f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 \qquad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Puisque f_N est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ avec $|x - x_0| \leq \delta$, on a

$$(**) \qquad |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon/3.$$

Soit $x \in E$ avec $|x - x_0| \leq \delta$; on a alors, en utilisant l'inégalité triangulaire et les inégalités $(*)$ et $(**)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 2.4.2 (i) La continuité de f_n et de f en x_0 signifie :

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0);$$

comme $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et $f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$, la conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une *interversion de limites :*

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

(ii) Le théorème précédent peut être en défaut si on remplace la convergence uniforme par la convergence simple ; nous avons vu plusieurs exemples (voir Exemples 2.1.3) de suites de fonctions f_n continues (et même indéfiniment dérivables) dont la limite simple n'est pas continue.

2.4.2 Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues

Théorème 2.4.3 ***(Intégrale d'une limite uniforme)*** *Soit* $[a,b]$ *un intervalle borné de* $\mathbf{R}$ *et et* $f_n : [a,b] \to \mathbf{K}$ *une suite de fonctions* continues *uniformément convergentes vers une fonction (continue)* $f : [a,b] \to \mathbf{K}$. *Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, il existe N tel que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad x \in [a,b] \text{ et} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Soit $n \geq N$. On a (en utilisant la monotonie de l'intégrale) :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)dx - f(x))dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x)dx - f(x)|dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dx \\ &= \varepsilon(b-a). \blacksquare\end{aligned}$$

Remarque 2.4.4 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une *interversion* d'une limite et d'une intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Corollaire 2.4.5 ***(Primitive d'une limite uniforme)*** *Sous les hypothèses du théorème précédent (Théorème 2.4.3), soit $x_0 \in [a,b]$ et notons $F_n : x \to \int_{x_0}^x f_n(t)dt$ et $F : x \to \int_{x_0}^x f(t)dt$ les primitives de f_n et de f nulles en x_0 Alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers F sur $[a,b]$.*

Démonstration En reprenant la démonstration du Théorème 2.4.3 et en remplaçant a par x_0 et b par x, on a

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_{x_0}^x f_n(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leq \varepsilon|x - x_0| \leq \varepsilon(b-a).$$

et l'assertion s'ensuit. ■

Remarque 2.4.6 (i) La conclusion du Théoème 2.4.3 peut être en défaut si on suppose seulement que la suite de fonctions f_n converge simplement vers une fonction continue f. Un tel exemple est donné dans Exemple 2.1.3.vi. Voici un autre exemple : soit $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction continue définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si}\, x \in [0, 1/2n] \\ 2n - 2n^2x & \text{si}\, x \in [1/2n, 1/n] \\ 0 & \text{si}\, x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

La suite f_n converge simplement vers la fonction $f = 0$; en effet, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $x > 0$; alors $x \geq 1/n$ pour tout $n \geq N := E(1/x)$ et donc $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq N := E(1/x)$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$, on a $\int_0^1 f_n(x)dx = \dfrac{1}{2}$. Mais $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

(ii) La conclusion du Théoème 2.4.3 peut être en défaut si on remplace l'intervalle borné $[a,b]$ par un intervalle non borné : soit $f_n : [0,+\infty] \to \mathbf{R}$ la fonction continue définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si}\, x \in [0, n] \\ n\left(n + \dfrac{1}{n}\right) - nx & \text{si}\, x \in [n, n + \dfrac{1}{n}] \\ 0 & \text{si}\, x \in [n + \dfrac{1}{n}, +\infty[. \end{cases}$$

La suite f_n converge uniformément vers la fonction $f = 0$ sur $[0, +\infty[$; en effet, on a $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ pour tout n et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = 0.$$

D'autre part, on

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^n f_n(x)dx + \int_n^{n+1/n} f_n(x)dx = 1 + \frac{1}{2n}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Pour un autre exemple, voir l'Exercice 2.6.19
(iii) Le Théorème 2.4.3 est encore valable si on suppose que f et les f_n sont seulement continues par morceaux. (On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ est continue par morceaux s'il existe une suite $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_r = b$ telle que $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est continue et telle que les limites à droite et à gauche $f(a_i+)$ et $f(a_{i+1}-)$ existent, pour tout $i = 0, \ldots, r-1$.)

2.4.3 Limite uniforme de fonctions dérivables

Théorème 2.4.7 ***(Dérivée d'une limite uniforme)*** *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et et $f_n : [a, b] \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur $[a, b]$. On suppose que :*
- *la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue) $f : [a, b] \to \mathbf{K}$;*
- *la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue) $g : [a, b] \to \mathbf{K}$.*

Alors f admet une dérivée continue et $f' = g$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [a, b]$, on a

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$. D'autre part, par le Corollaire 2.4.5, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f'_n(t)dt = \int_a^x g(t)dt.$$

Il s'ensuit que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Comme g est continue, il s'ensuit que f est dérivable et que $f' = g$.■

Remarque 2.4.8 La conclusion du Théorème n'est plus nécessairement valable sans l'hypothèse de la convergence uniforme des dérivées des f_n. Un exemple est fourni par la suite f_n avec $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, comme vu en Exemple 2.1.3.iv.

2.5 Propriétés d'une série uniformément convergente

Les propriétés que nous venons de voir des limites uniformes de suites ont une traduction pour les séries uniformément convergentes.

Théorème 2.5.1 ***(Continuité d'une série uniformément convergente)*** *Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et $u_n : E \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions . On suppose que la série $\sum_n u_n$ est uniformément convergente vers une fonction $S : E \to \mathbf{K}$. Soit $x_0 \in E$. Si les u_n sont continues sur E, alors S est continue sur E.*

Démonstration On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$. Alors les S_n sont continues et convergent uniformément vers S sur E. On conclut avec le Théorème 2.4.1.
■

Théorème 2.5.2 ***(Intégrale d'une série uniformément convergente)*** *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et et $u_n : [a, b] \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions continues. On suppose que la série $\sum_n u_n$ est uniformément convergente vers une fonction $S : [a, b] \to \mathbf{K}$. Alors la série numérique de terme général $\int_a^b u_n(x)dx$ converge vers $\int_a^b S(x)dx$.*

Démonstration On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$. Alors les S_n sont continues et convergent uniformément vers S sur E. On conclut alors avec le Théorème 2.4.3.■

Remarque 2.5.3 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une somme et d'une intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx.$$

Corollaire 2.5.4 ***(Primitive d'une série uniformément convergente)*** *Sous les hypothèses du théorème précédent (Théorème 2.5.2), soit $x_0 \in [a,b]$ et notons $F_n : x \to \int_{x_0}^x u_n(t)dt$ et $F : x \to \int_{x_0}^x S(t)dt$ les primitives de u_n et de S nulles en x_0 Alors la série de fonction de fonctions de terme général $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers F sur $[a,b]$.*

Théorème 2.5.5 ***(Dérivée d'une série uniformément convergente)*** *Soit $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et et $u_n : [a,b] \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur $[a,b]$. On suppose que :*

- *la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction $S : [a,b] \to \mathbf{K}$;*
- *la série de terme général $(u_n')_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue) $g : [a,b] \to \mathbf{K}$.*

Alors S admet une dérivée continue et $S' = g$.

Démonstration On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$. Alors les S_n sont continues et convergent uniformément vers S sur E. On a $S_n' = \sum_{k=0}^n u_n'$. On conclut alors avec le Théorème 2.4.7.■

Remarque 2.5.6 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une somme et d'une dérivation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)'.$$