ENSA- KENITRA

A.U: 2018-2019

Contrôle d'Analyse Fondamentale :

S2

Durée : 2h

Exercice 1 :

On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

1. En remarquant que, pour $k \geq 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).
2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
   (b) Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :$\forall k \in \mathbb{N}$, $|(a_k - a_{k+1})B_k| \leq (a_k - a_{k+1}) \times M$.
   (c) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est absolument converge (et donc convergente).
   (d) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.
3. Exemple.
   Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.
   (b) En déduire pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$.
   (c) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Bonne chance