Contrôle d'Analyse Fondamentale :

S2

Durée : 2h

Exercice 1 :

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour chaque entier n, on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{\sin t} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.
3. Soit $\phi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin\left((2n+1)t\right) dt$ tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.
5. En déduire que $J_n - I_n \to 0$.
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \to I$.
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 2 :

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

   (b) En déduire que

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha - 1) n^{\alpha - 1}}.$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Démontrer que

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \longrightarrow_{n \to +\infty} 0.$$

3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0, \pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2 \sin(t/2)}.$$

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Bonne chance