ENSA KENITRA

Controle mi-semestre : Analyse

Problème

Partie I. Étude de la série harmonique

1. Soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{f(n)}{n^2}$.
   (a) Montrer que pour tout n entier naturel
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$
   (b) En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
   (c) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$?
2. On considère la suite de terme général $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$.
   Montrer que cette suite est convergente. (on pourra montrer qu'elle est positive et décroissante).
   Soit γ sa imite. (γ est appelée constante d'Euler).
3. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$,
   $$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
   (b) Justifier l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \geq 1$.
   Montrer que cette somme est équivalente à $\dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.
   (c) Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à termes strictement positifs telles que :
   - les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient équivalentes au voisinage de $+\infty$.
   - la série de terme général a_n converge.

   alors les sommes $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} b_k$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.
   (d) Déduire des questions précédentes que $\gamma - v_n$ est équivalente à $-\dfrac{1}{2n}$ au voisinage de $+\infty$.
   (e) Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on prend comme valeur approchée [2] de γ la valeur v_n, avec $n = 10^4$.

4. Application : Soit x un réel strictement positif donné. On pose

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

et on considère la série de terme général $u_n = x^{s_n}$.

(a) Soit $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$. Montrer, en utilisant la deuxième question, que cette série est convergente.

(b) Quelle est la nature de cette série pour $x \geq \frac{1}{e}$?

Partie II. Étude de la série harmonique alternée

1. (a) On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Soit S_n la somme partielle de rang n de cette série. Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

2. Soit n un entier naturel. On définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \; f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k.$$

(a) Exprimer $f_n(t)$ en utilisant la somme d'une série géométrique.

(b) On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$. En calculant $\int_0^1 f_n(t) dt$ de deux façons différentes, exprimer S_n en fonction de I_n

3. Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$. En déduire la valeur de a somme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Partie III. Étude de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$

1. Soit t un réel de l'intervalle $[0, \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

Calculer $c_n(t)$ pour $0 < t \leq \pi$. (On pourra utiliser $s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$).

Préciser $c_n(0)$. Montrer que la fonction $t \mapsto c_n(t)$ est continue sur $[0, \pi]$.

2. On pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que

$$w_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) c_n(t) \mathrm{d}t,$$

puis que

$$w_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

3. (a) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ est bornée sur $[0, \pi]$. En déduire une majoration de $\int_0^\beta f(t) \sin\frac{(2n+1)t}{2} \mathrm{d}t$ pour $\beta \in]0, \pi]$.

   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\beta^\pi f(t) \sin\frac{(2n+1)t}{2} \mathrm{d}t = 0.$$

   En déduire la valeur de a somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Fin de problème

École Nationale des Sciences Appliquées

Kénitra

Analyse Fondamentale

Classes Préparatoires (Semestre 2)

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit.
Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Bon courage.

PREMIER PROBLEME

1. Démontrer que la série trigonométrique $\sum\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nx)$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\sin(nx)$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$.

3. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

4. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, $f(x)=x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction f sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Donner une série trigonométrique associée à f.

6. En déduire les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

   Déduire alors de la seconde somme la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

7. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$ puis démontrer que $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\frac{\pi^2}{12}$.

8. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
   Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

9. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum\frac{n}{3^n}\cos(nx)$.

DEUXIEME PROBLEME

On admet que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. (a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

   (b) Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. (a) Établir : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

   (b) En déduire: $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \quad |S(y) - S(x)| = \frac{\pi^2}{6} |y - x|$.

   (c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

4. (a) Montrer, pour tout couple (x, y) de $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

   (b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

   (c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}$.
   Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note ω la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \omega(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

   (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \omega(t)dt$ converge et calculer sa valeur.

   (b) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} \omega(t)dt \leqslant \omega(n)$, et en déduire: $\int_1^{+\infty} \omega(t)dt \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \omega(t)dt$.

   (c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.

7. (a) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.