Contrôle continu d'Analyse

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit. Bon courage.

Exercice 1 *Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$. Pour $n\geq 1$, on pose $V_n=\prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.*

1. *Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente.*
2. *En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$ est convergente.*
3. *Démontrer que*
$$V_n=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\geq 0}\frac{1}{p_k^j}\right).$$
4. *En déduire que $V_n\geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.*
5. *Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}$?*
6. *Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k^\alpha}$?*

Exercice 2 *Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=n^2x(1-nx)$ si $x\in[0,1/n]$ et $f_n(x)=0$ sinon.*

1. *Étudier la limite simple de la suite (f_n).*
2. *Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?*
3. *Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a\in]0,1]$.*

Exercice 3 *Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n\geq 1$, on définit le polynôme B_n de degré n par :*
$$B_n(x)=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right).$$
On rappelle que la fonction f, continue sur $[0,1]$, est uniformément continue, i.e. pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta_\varepsilon>0$ tel que, pour couple $(x,y)\in[0,1]^2$ vérifiant $|x-y|\leq\eta_\varepsilon$, on a : $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. On note par ailleurs $M=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$.

1. *Pour $x,y\in\mathbb{R}$, donner une expression simple des quantités suivantes :*
$$\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k};\ \sum_{0\leq k\leq n}k\binom{n}{k}x^ky^{n-k}\ \text{ et }\ \sum_{1\leq k\leq n}k(k-1)\binom{n}{k}x^ky^{n-k}.$$
2. *Pour $x\in[0,1]$, on pose $r_k(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Montrer que*
$$\sum_{0\leq k\leq n}r_k(x)=1,\ \sum_{0\leq k\leq n}kr_k(x)=nx,\ \sum_{1\leq k\leq n}k(k-1)r_k(x)=n(n-1)x^2.$$
En déduire l'égalité :
$$\sum_{0\leq k\leq n}(k-nx)^2r_k(x)=nx(1-x).$$

3. *Montrer que pour tout* $x \in [0,1]$, *on a :*

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{0\leq k\leq n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x).$$

4. *Pour* $x \in [0,1]$, *on note* $J(x) = \{0 \leq k \leq n;\ |k - nx| \leq n\eta_\epsilon\}$. *Prouver que :*

$$\sum_{k\in J(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) \leq \epsilon.$$

5. *Prouver que :*

$$\sum_{k\in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) \leq 2M \sum_{k\in J(x)^c} \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta_\epsilon^2} r_k(x),$$

puis que

$$\sum_{k\in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) \leq \frac{M}{2n\eta_\epsilon^2}.$$

6. *En déduire que la suite de polynômes* B_n *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.
7. *En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : si* f *est continue sur* $[a,b]$, *il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

Examen d'Analyse
Durée: 2H 30mn

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit. Bon courage.

Objectifs : On note F la fonction définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie **III.** qui utilise des résultats de la partie **I.**, les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

   Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t)dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.
3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   (b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
   En déduire que F est une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5. *Lien avec ζ*

Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. *Étude de la convergence*

   (a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

   (b) Démontrer que, pour $x > 0$, $c_n(x) \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

   En déduire, pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

7. *Cas où $x = 1$*

   On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.

   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.

   En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

   (b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.

   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

8. *Développement asymptotique en 1*

   (a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

   (b) En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

9. *Développement asymptotique en 1 (bis)*
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1,2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

(a) Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

(c) Exprimer, pour $x \in]1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

(d) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

(e) En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*
Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}.$$