Examen d'Analyse

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document.*

# PROBLEME 1

## A - Etude de la fonction $f$ telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

1. Obtenir l'ensemble de définition $D$ de $f$.
2. $f$ est-elle dérivable en 0 ?
3. Justifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $[0;1[$ .
4. Dresser le tableau de variations de $f$. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$ .

## B - Etude de la suite $v$ telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant e$.
2. Justifier que la suite $v$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $\forall x \geqslant e, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. Enoncer l'inégalité des accroissements finis.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
6. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier $n_1$ à partir duquel $v_n$ est une valeur approchée de $e$ à $10^{-12}$ près.

## C - Etude de la fonction $g$ telle que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$

1. Vérifier que, sur $D\backslash\{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2\ln^2(x)}h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

   Etudier les variations de $g$.
2. Déterminer la limite de $g$ en 1.
3. Déterminer la position relative de la courbe représentative de $g$ par rapport à celle de $f$.

## D - Tracé d'une courbe paramétrée

On considère $(\Gamma)$ la courbe donnée par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ pour $t$ décrivant $D\backslash\{0\}$.

1. Déterminer les asymptotes de $(\Gamma)$ ainsi que la position relative de $(\Gamma)$ par rapport à celles-ci.
2. Tracer la courbe $(\Gamma)$ en précisant la tangente au point de paramètre $t = e$.

# PROBLEME 2

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
   On note $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$. Donner les tableaux des variations de $f$ et de $f^{-1}$
2. Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté $\alpha$ tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$.
   Montrer que $\alpha \neq 0$.
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$$
3. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ existe et $u_n \in [0;1]$
   (a) Montrer que pour tout réel $x$ de $[0;1]$ , $f(x) - x \geqslant 0$. Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.
4. On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de $u_n$.
   On pose pour tout entier naturel $n$ : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n\, e^{-u_{n+1}}$.
   (b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$
   (c) Montrer que $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire que la suite $(S_n)$ est convergente.
   On note $L$ sa somme. Montrer que $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.
   (d) Montrer finalement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-L}}{2^n}$

# EXERCICE

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera $u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. Démontrer que $u_n \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.
4. En étudiant $v_n = u_n - \ln(n)$, montrer que
   $$u_n = \ln(n) - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$