CPI 1/S2

Exercice 1

Soit le signal périodique de période 2π défini par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Enoncer le théorème de Dirichlet.
2. Enoncer le théorème de Parseval.
3. Calculer les coefficients de Fourier du signal f.
4. Déterminer la série de Fourier du signal f.
5. En déduire la somme des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
6. En appliquant l'égalité de Parseval, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 2

Soit le signal périodique de période 2π défini par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier du signal f.
2. Déterminer la série de Fourier du signal f.
3. En déduire la somme des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
4. En appliquant l'égalité de Parseval, calculer la somme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3

Soit le signal impaire périodique de période 2π défini par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier du signal f.
2. Déterminer la série de Fourier du signal f.
3. En déduire la somme des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
4. En appliquant l'égalité de Parseval, calculer les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Exercice 4

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π–périodique, définie sur $]-\pi\,;\pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π.
2. Quelle est la parité de la fonction g ? Justifier votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée $g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$.
   (a) Donner les coefficients b_n pour tout entier n strictement positif.
   (b) Calculer a_0 et a_1.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

(d) En déduire que si n est impair et $n \neq 1$, alors $a_n = 0$.

(e) Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors $a_{2p} = \dfrac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$.

4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.

   (a) A–t–on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = Sg(t)$? Justifier précisément votre réponse.

   (b) Montrer que

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} \cos(2pt).$$

   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.

5. (a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2$.