CPI 1/S2

Exercice 1

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{n^2+k^2} \geq \dfrac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

1. Déterminer D_ζ.
2. Montrer que ζ est continue sur D_ζ.
3. Etudier le sens de variations de ζ.
4. Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.
5. Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.
6. En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,
$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$
7. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
8. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
9. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, soient $f_n(t) = \dfrac{\arctan(nt)}{n^2}$ et $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Déterminer D_f.
2. Etudier la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

4. Etudier la parité de f.
5. Calculer la limite de f en $+\infty$.
6. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
7. (a) Soit $a > 0$. Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ sur $[a; +\infty[$.

   (b) Endéduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
8. Etudier la dérivabilité de f en 0.
9. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S sa somme, pour tout x de $[0, +\infty[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$.
2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
3. Étudier la suite $(S(n) - S_n(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la série S ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
4. Dans cette question, on veut démontrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.

   (a) Montrer que pour tout $A > 0$, la série converge uniformément sur $[0, A]$.

   (b) En déduire que S est continue sur $[0, +\infty[$.
5. Dans cette question, on veut démontrer que S est dérivable sur $[0, +\infty[$.

   (a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

   (b) En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.
6. Montrer que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est concave.
7. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :
   $\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$.

   (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge et calculer sa valeur.

   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t)dt \leq \varphi(n)$, et en déduire :
   $$\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

   (c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln(x)$ en $+\infty$.
8. Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$. Puis tracer l'allure de la courbe représentative de S.