CPI 1/S2

Exercice 1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n) ;
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 2

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g_n = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g_n.
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 3

On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+.$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,+\infty[$;
2. Etudier la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$;
3. Etudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

Exercice 4

On pose

$$f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-nx} \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+.$$

Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 5

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1. Etudier la limite simple de (f_n) et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geqslant \lim f_n(x).$$

2. En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$

justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ (avec $a > 0$).

3. Etablir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1-nx) \text{ si } x \in [0,1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?
3. Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 7

1. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\mathrm{d}x.$$