Université Ibn Tofail **Analyse fondamentale, 2020-2021**
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Cycle Préparatoire-Semestre 2

Série $n^\circ 4$: Séries numériques

Exercice 1
Étudier les séries de terme général :

1. $u_n = 1 - \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}}\,dx$ **2**. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$ **3**. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

4. $u_n = ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **5**. $u_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ **6**. $u_n = \frac{n+\cos n}{e^n + \sin n}$

7. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ **8**. $u_n = \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$ **9**. $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos t\,dt$

10. $u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

Exercice 2
En utilisant les séries de Bertrand, déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n^2+\sqrt{n})\ln n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 2} \sin\left(\frac{1}{n\,ln^2 n}\right).$$

Exercice 3
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n^2+k)^\alpha}$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 4
Étudier selon $(\alpha;\beta)$ réels, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi\right).$$

Exercice 5
Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$

2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Exercice 6

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.
2. Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Exercice 7

Nature et somme des séries suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2^n}{n!} \qquad 2.\ \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

Exercice 8

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.
2. Sommer la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

Exercice 9

Montrer que la série de teme général :

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

converge et calculer sa somme ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 10

1. On suppose que $\sum_{n\geq 1} a_n$ est une série convergente à termes positifs. Montrer que ces trois séries sont également convergentes :

$$(a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{a_n+1} \qquad (b)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \qquad (c)\ \sum_{n\geq 1} a_n^2$$

(on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz).

2. On suppose maintenant que $\sum_{n\geq 1} a_n$ an est une série divergente à termes positifs. Montrer alors que les séries suivantes divergent :

$$(a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{a_n+1} \qquad (b)\ \sum_{n\geq 1} \sqrt{a_n}$$

Distinguer les cas $a_n \to 0$ et $a_n \nrightarrow 0$.

Que dire des séries suivantes ?

$$(c)\ \sum_{n\geq 1} a_n^2 \qquad (d)\ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n^2\,a_n}.$$