Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2018 / 2019
Cycle préparatoire, Semestre 2
Module : Algèbre linéaire

Contrôle continu

Mars 2019

Durée : 2H00

NB. Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0 \text{ et } y - z - t = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\beta \\ \beta \\ 2\alpha+\beta \end{pmatrix} \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que F est un ss-e.v. de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de F puis en déduire que $\dim(F) = 2$.
2. Montrer que G est un ss-e.v. de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de G. En déduire $\dim(G)$.
3. Établir que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

On définit les vecteurs $u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{U} = u_1, u_2, u_3$ la famille constituée par ces trois vecteurs.

4. On pose $H = \mathrm{Vect}(\mathscr{U})$. Que peut-on en déduire pour $\dim H$?
5. Justifier que $H \subset F$ puis en déduire l'égalité.

Exercice 2.

On désigne par $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille 2×2.

1. Donner (sans démonstration) une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser la dimension de cet espace.

Lorsque $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on appelle *transposée de* A la matrice notée A^T définie par

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On dit que A est symétrique (resp. antisymétrique) lorsque $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$).
le sous-ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$)

2. Démontrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Calculer la dimension de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et celle de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
4. Justifier que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Application : décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans cette somme directe.

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2018/2019
Cycle préparatoire, Semestre II
Module : Algèbre linéaire

Examen final
Juin 2019
Durée 1H30

Notez bien que les documents, les calculatrices et les portables sont interdits. Il sera tenu en compte, dans la correction, la clarté et la précision du raisonnement

Exercice 1.

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E. Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent : $f \circ g = g \circ f$. On se propose de démontrer que f et g ont un vecteur propre en commun, c'est à dire, qu'il existe 2 scalaires λ et μ et un vecteur $v \neq 0$ tel que

$$f(v) = \lambda.v \text{ et } g(v) = \mu.v.$$

1. Justifier que f admet une valeur propre. Dans la suite on la note λ et on note E_λ le sous-espace propre associé.
2. Montrer que E_λ est stable par g. On note g_λ la restriction de g à E_λ.
3. Montrer que g_λ admet une valeur propre.
4. Conclure : montrer que f et g ont un vecteur propre en commun

Exercice 2.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathcal{B}$ la famille $(X^2+1; X+1; 2X^2-X)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et celle de $\mathcal{B}$ vers la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.

Très bon courage