Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2017/2018
Cycle préparatoire, Semestre 2
Module : Algèbre linéaire

Contrôle continu

Mars 2017
Durée 1H30

Notez bien que :

- *Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement*
- *Les documents, les calculatrices et les portables sont interdit.*

Exercice 1.

(1) Soient $F := \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$ et $G := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y, z \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Préciser leurs bases et leurs dimensions. Sont-ils en somme directe ?

(2) Soit $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y - z,\ t = x + y + z\}$.
Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.

Exercice 2.

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs : $e_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}.$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5.
Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$, $E + F$.

Bon courage !

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2017/2018
Cycle préparatoire, Semestre 2
Module : Algèbre linéaire

Contrôle final

Mai 2018

Durée 1H30

Notez bien que :

- Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
- Les documents, les calculatrices, les tablettes et les portables sont interdits.

Exercice 1.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$.
   (a) Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.
   (b) En déduire que A est diagonalisable.
   (c) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x) = (x_1 - x_2, -3x_1 + 3x_2)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
3. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.
4. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

Bon courage !