Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2016/2017
Cycle préparatoire, Semestre 2
Module : Algèbre 2

Contrôle continu
Durée 2H00
02 Mai 2017

NB.

Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1 : On pose :

$$F = \{ \begin{pmatrix} a+b & -b \\ a+2b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$$

(1) Montrer que F est un *s-e-v* de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Donner une base et la dimension de F.

Exercice 2 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la suite (P_1, P_2, P_3, P_4) ,.où

$$P_1 = (1-X)^3,\ P_2 = X(1-X)^2,\ P_3 = X^2(1-X),\ P_4 = X^3$$

Calculer les coordonnées de P_j dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$; en déduire que la suite (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3 : Dans cet exercice on notera $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

Donner la matrice A de f en prenant la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ pour les espaces de départ et d'arrivée.

(2) Montrer que $f \circ f = 3f$.
(3) Donner une base de $\mathcal{K}er f$. L'application f est-elle surjective ?
(4) Quelle est la dimension de l'image de f.
(5) Donner un système d'équations de $\mathcal{I}m f$.
(6) Donner une base de $\mathcal{I}m f$.
(7) Les *s-e-v* $\mathcal{K}er f$ et $\mathcal{I}m f$ sont-ils supplémentaires ?

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2016/2017
Cycle préparatoire, Semestre 2
Module : Algèbre 2

Contrôle final
Durée 1H30
Juin 2017

NB.

Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 4 dont une base est donnée par les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On appelle $\mathcal{B}$ cette base.

Soit A la matrice carrée d'ordre 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

À toute matrice X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on associe la matrice $Y = f(X) = AX + XA$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer le noyau de f.
4. Déterminer l'image de f
   (a) En particulier, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que M appartienne à $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Déterminer les antécédents par f de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, pour quelles valeurs de $a; b; c$ la matrice A est-elle diagonalisable?

Pour quelles valeurs de a ; b ; c la matrice A est-elle inversible?

Bon courage