Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2015/2016
Semestre 2 : Cycle préparatoire
Module d'algèbre linéai7re

Contrôle Continu

Mars 2016

Durée 2H

Exercice 1

Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$ trois éléments du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille (u, v, w) est liée. libre
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u, v, w). Donner une base de F.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + 2y + z = 0\}$.

   Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Déterminer une base de G.

   Montrer que $F = G$. (Indication : Montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$)

Exercice 2

1. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{K}^3$:

$$x = (1, 0, 0) \quad y = (0, 1, 0) \quad u = (0, 1, 1) \quad v = (1, 0, 1).$$

   On pose $F = \text{Vect}(x, y)$ et $G = \text{Vect}(u, v)$.
   (a) Déterminer la dimension de $F \cap G$.
   (b) A-t-on $\mathbb{K}^3 = F \oplus G$?

2. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{K}^4$:

$$x = (0, 2, 0, -2) \quad y = (0, 3, 0, 5) \quad u = (1, 0, 2, 0) \quad v = (2, 0, -3, 0).$$

   On pose $F = \text{Vect}(x, y)$ et $G = \text{Vect}(u, v)$.
   (a) Déterminer la dimension de $\text{Vect}(x, y, u, v)$.
   (b) A-t-on $\mathbb{K}^4 = F \oplus G$?

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que la famille $(f(u), f^2(u), f^3(u), \ldots, f^n(u))$ soit une base de E.

a) Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est aussi une base de E.
b) Montrer que f est bijectif.
c) Montrer qu'il existe n scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :
$f^n(u) = a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(u)$.
d) En déduire que : $f^n = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2015/2016
Cycle préparatoire : Semestre 2
Module d'algèbre linéaire

Contrôle Final

Durée 2H

Juin 2016

A noter bien :

- **Tous les documents, calculatrices ou autres machines sont interdits**
- **Tout résultat non justifié ne sera pas compté**

Exercice 1

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha I_3 + \beta A$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $x \in E$ n'appartenant pas à $\text{Ker}(f^2)$.

1. Préciser pourquoi $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$, $f^2(x) \neq 0$, $f^3(x) = 0$.
2. Montrer que $\{x, f(x), f^2(x)\}$ est une base de E.
3. Quelle est la matrice de f dans la base $\{x, f(x), f^2(x)\}$ de E (dans cet ordre) ?

Exercice 3

$$\text{Soient } m \text{ un réel, et la matrice } A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculez, en fonction de m, le déterminant de A_m.
2. Quel est le rang de A_1 ? de A_{-2} ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de A_m ? Quelles sont les valeurs propres de A_m ?
4. La matrice A_m peut-elle avoir une seule valeur propre ? Pour quelles valeurs de m la matrice A_m a-t-elle seulement deux valeurs propres distinctes ?
5. En déduire que si $m \notin \{1, -1/2\}$, la matrice A_m est diagonalisable.

Bon courage