Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc
d'Algèbre 2

Année universitaire 2014/2014
S 2 : Années préparatoires
Mathématiques : Module

Contrôle Continu
Durée 1H30

NB. *Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits*

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,3,-2,2) \quad v_2 = (2,7,-5,6) \quad v_3 = (1,2,-1,0)$$
$$w_1 = (1,3,0,2) \quad w_2 = (2,7,-3,6) \quad w_3 = (1,1,6,-2).$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

1. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F.
2. Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2. En déduire une base de G.
3. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. En déduire une base de $F + G$.
4. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$. Donner une base de E.
5. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?

Exercice 2

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\ker(f)$.

Bon courage