Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra-Maroc

2013/2014

Contrôle continu d'algèbre linéaire-S2

Durée 2H

- Les documents, les calculatrices et les portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $B = A - I_3$.

(a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.

(b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.

(c) En déduire A^n Pour tout entier n.

Exercice 2

Calculer le rang des matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient $e_1 = (0, 1, -2, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2, -1)$, $e_3 = (3, 2, 2, -1)$, $e_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_5 = (0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $vect(e_1, e_2, e_3) = vect((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$

2. $(1, 1, 0, 0) \in vect(e_1, e_2) \cap vect(e_2, e_3, e_4)$

3. $dim_{\mathbb{R}}(vect(e_1, e_2) \cap vect(e_2, e_3, e4)) = 1$

4. $vect(e_1, e_2) + (e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$

5. $vect(e_4, e_5)$ est un sous espace vectoriel supplementaire de $vect(e_1, e_2, e_4)$ dans $\mathbb{R}^4$

Université Ibn Tofail Kénitra
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
S2 - Mathématiques
Prof. Youssef BENTALEB

2013-2014

Examen final d'algèbre
Durée 2H

Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1 :

Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

en conservant la base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 2 :

Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_n$. On note p' la dérivée de p.

On définit u par $(u(p))(t) = p(t+1) - p(t) - p'(t)$.

1. Montrer que u est linéaire de P_n dans P_{n-2}.
2. On choisit $n = 4$. Donner la matrice A de u par rapport aux bases B_n et B_{n-2}.

Exercice 3 :

On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, pour quelles valeurs de $a; b; c$ la matrice A est-elle diagonalisable ? Pour quelles valeurs de a ; b ; c la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 4 : :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer le polynôme minimal de la matrice A.

2- En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Bon courage

det = 1(c - 0) + a