

Algèbre linéaire - Série n° : 3

Exercice 1:

Déterminer le *rang* des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2:

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres réelles ($K = R$), puis complexes des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3:

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans R , dans C ? Si oui, donner une matrice D diagonale et une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4:

$$\text{On définit } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

1. Pour quelles valeurs de a ; b ; c la matrice A est-elle inversible ?
2. Pour quelles valeurs de a ; b ; c la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 5:

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
2. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
3. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 . Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w) .
4. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k .
5. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.