Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Mathématiques, Algèbre 2, 2019-2020

Cycle préparatoire (S2)

Série n° : 2
Exercices de la semaine du 16 au 21 mars 2020
Devoir à rendre sur la plate forme Google Classroom avant Mardi 24 mars 2020, 00H00

Exercice 4.

Décrire le sous-espace de $C[t]$ engendré par chacune des parties suivantes :
1. $i)\{1, t, t^2, t^3\}$; $ii)\{t, t^3+2, t^4\}$.
2.Soient $p(t) = -t + 2t^2 + 5t^3$, $q(t) = 2 - 3t - 4t^2 + t^3$, $r(t) = -3 + 4t + 7t^2 + t^3$ et $s(t) = 5 + t$. Les polynômes $r(t)$ et $s(t)$ appartiennent-ils au sous-espace de $R[t]$ engendré par $p(t)$ et $q(t)$?

Exercice 5.

Soit

$$\begin{aligned} f : R^2 &\to R^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 + x_2, -x_1 - x_2) \end{aligned}$$

1. **(a)** Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer Ker f et Im f
   (c) Calculer $f \circ f$. Le résultat était-il prévisible ?
2. E, F, G étant des espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ montrer que :

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow Imf \subset Kerg$$

Exercice 6.
Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver une base et donner la dimension :

1. le -espace vectoriel E des matrices carrées A de la forme: A=$\begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}$
2. Le -espace vectoriel T des matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telles que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.
3. Le K-espace vectoriel des polynômes $p(t) \in K[t]$ de degré ≤ 6 qui s'annulent en 0 et 1. Quelle est la forme générale d'un tel polynôme ?

Exercice 7.

On définit les fonctions p_0, p_1, p_2, f_3, f_4 par

$$\forall t \in R \; p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, f_3(t) = \exp(t), f_4(t) = t\exp(t)$$

1. Soit la famille $\mathcal{F} = \{p_0, p_1, p_2, f_3, f_4\}$. Montrer que cette famille est libre.
2. Soit P_2 l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels et soit F l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$. On définit u par $u(p) = f_3 p' + p$ où p' est la dérivée de p.
   (a) Montrer que u est linéaire de P_2 dans F.
   (b) u est-elle injective ?
   (c) Donner une base de Im u.
3. Donner la matrice A représentant u (préciser les bases choisies pour P_2 et F).
4. Etudier l'injectivité de u à l'aide de la matrice A.