Calcul matriciel et déterminants

Exercice 1 *on considère la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5.

Exercice 2 *On considère les trois matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* AB *puis* $(AB)C$.
2. *Calculer* BC *puis* $A(BC)$.
3. *Que remarque-t-on ?*

Exercice 3 *On considère les deux matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* AB.
2. *Calculer* BA.
3. *Que remarque-t-on ?*

Exercice 4 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et soit* $B = A - I_3$.

(a) *Calculer* B^2, B^3 *en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour* B^n, *pour tout entier* n.

(b) *Développer* $(B+I_3)^n$ *par la formule du binome et simplifier.*

(c) *En déduire* A^n *Pour tout entier* n.

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Pour tout entier* n, *calculer* A^n *en utilisant* $A - I_4$.

Exercice 5 1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) *Soient* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que $AB = AC$, *a-t-on* $A = C$? A *peut-elle être inversible ?*

(b) *Déterminer toutes les matrices* F *telles que* $A \times F = O$ (O *étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).*

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. *Déterminer toutes les matrices* B *telles que* $BA = I_2$.

3. *Soient* A *et* B *deux matrices carrées* $n \times n$ *telles que* $AB = A + I_n$.
Montrer que A *est inversible et déterminer son inverse (en fonction de* B*).*

Exercice 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 *et montrer que* $A^2 = 2I - A$, *en déduire que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.

Exercice 7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. *Quel est le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.
4. A *est-elle inversible ?*

Exercice 8 *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 *Inverser les matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 *On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de D_2 à un déterminant $n \times n$ du même type.

Exercice 11 *On note $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 12 *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin\frac{c-b}{2} \sin\frac{b-a}{2} \sin\frac{a-c}{2}$$

Exercice *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note B_n le dterminant suivant :*

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Exercice 13 *Soit a un rel. On note Δ_n le dterminant suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. *Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.*
2. *Dmontrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$.*