Travaux dirigés de Mécanique du Point

TD N°3 – La Cinématique Galiléenne

Exercice 3.1 : Coordonnées cartésiennes 2D

Dans le référentiel $R(O,\vec{i},\ \vec{j},\ t)$ le mouvement d'un point mobile M est donné par :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) \\ y(t) = b\sin(\omega t) \end{cases}$$

1) Soit y=f(x) la fonction représentant la trajectoire du point M :
   a. Déterminer la fonction f.
   b. Tracer cette trajectoire pour b = 2a.
   c. Où se trouve le point M aux instants t vérifiant : $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

2) Soit le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ dans (R).
   a. Déterminer l'expression de ces deux vecteurs.
   b. Figurer ces vecteurs aux instants t vérifiant : $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

3) On se propose d'étudier le rayon de courbure de cette trajectoire :
   a. Démontrer que l'expression générale du rayon de courbure R_0 est :
   $$R_0 = \frac{\left\|\vec{v}\right\|^3}{\left\|\vec{v}\wedge\vec{a}\right\|}.$$
   b. Déterminer l'expression de R_0 dans notre exemple.
   c. Calculer, en fonction de a, ce rayon de courbure aux 4 points calculés à la question (1.c).

Exercice 3.2 : Coordonnées polaires 2D

Un point mobile décrit un cercle de centre C et de rayon R. L'origine de l'axe polaire est un point 0 de la circonférence. Le mobile M est repéré en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} r(t) = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \\ \theta(t) = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) \end{cases}$$

. Le point M tourne à une vitesse angulaire $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$. A l'instant t = 0, le mobile se trouve au point A.

1) Déterminer les coordonnées polaires de $M(r,\theta)$ en fonction de R, ω_0, t. Déduire la trajectoire polaire $\overrightarrow{OM} = ...$
2) Déterminer, en coordonnées polaires, la vitesse et l'accélération de M sur sa trajectoire. Figurer sur le schéma au point M :
   a) Les vecteurs unitaires radial $\overrightarrow{u_r}$ et orthogonal $\overrightarrow{u_\theta}$.
   b) Les vecteurs unitaires vitesses et accélération.
   c) Les vecteurs unitaires tangentiel $\overrightarrow{u_t}$ et normal $\overrightarrow{u_n}$.

Exercice 3.3 : Coordonnées cylindriques 3D

Les coordonnées cylindriques d'un point mobile M sont : $\begin{cases} r(t) = R_0 \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = at \end{cases}$ avec R_0 , ω et a constantes positives.

1) Dans un référentiel R(O,x,y,z,t), figurer la position du mobile à l'instant initial, position notée A.
   a. Sur quelle surface sont situés les points vérifiant $r(t) = R_0$.
   b. Tracer l'allure de la trajectoire.
2) Soit le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ dans (R) :
   a. Exprimer dans le référentiel (R) , les vecteurs position, vitesse et accélération.
   b. Figurer à la position initiale A puis à d'autres instants les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$.
3) Calculer l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe (Oz). Calculer sa norme.
4) Calculer l'accélération tangentielle a_τ .
5) Déterminer le rayon de courbure R_c de l'hélice en fonction de R_0 et ω.
6) Déterminer le « pas » h de l'hélice en fonction de a et ω. On rappelle que h est la distance séparant 2 positions successives de M sur la même génératrice du cylindre.

Exercice 3.4 : Mouvement rectiligne et uniforme

Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$, le long d'une droite D. Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\overrightarrow{NS}, \vec{v})$ a la valeur α. T étant animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{u}$.

1) Quelle doit être la valeur de tir $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{SN})$ si l'on veut couler N ?
2) Si l'on veut que T atteigne N en un temps minimum, c'est-à-dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? (Nous donnerons la relation entre α et θ).
3) Calculer alors l'angle de tir θ correspondant.