e Nationale des Sciences
Appliquées

Série N°1

Exercice 1 :

Soient trois points : A (1, 0, 2), B (-2,1, 4) et C (0, 3 ,5) repérés dans le repère cartésien R(O,XYZ) muni d'une base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

a- Représenter graphiquement les points A, B et C.

b- Calculer les modules des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

c- En déduire leurs vecteurs unitaires $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$

d- Calculer les produits scalaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ puits $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

e- En déduire les angles formés par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

f- Déterminer les vecteurs projections du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AC}$ puis sur le vecteur $\overrightarrow{BC}$

Exercice 2 :

Soient les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ exprimés dans la base de coordonnées cartésiennes d'un repère R(O,XYZ) : $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{V}_2 = 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$,

a- Calculer les produits vectoriels $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$. Conclure.

b- Calculer la norme de $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. Que représente ce résultat ?. En déduire l'aire du triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

c- Déterminer l'angle formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

d- Déterminer le vecteur unitaire de la surface du parallélogramme formé sur les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

e- Calculer le double produit vectoriel $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$.

f- Calculer le produit mixte ($\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$). Que représente ce résultat ?

Exercice 3 :

Soient deux systèmes d'axes plans et parallèles $R(O,\vec{i},\vec{j})$ et $R'(O',\vec{i},\vec{j})$. Les coordonnées du point O' dans R sont (1, 3). Soient deux points A et B tels que A(2, 4) et B(4,-2) dans R'.

1. Calculer les coordonnées des points A et B dans le repère R.
2. Trouver les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans les repères R et R'.
3. Calculer le moment par rapport à O du vecteur $\overrightarrow{AB}$
4. Calculer le moment par rapport à O' du vecteur $\overrightarrow{AB}$
5. Calculer le moment par rapport à l'axe $\overline{OO'}$ du vecteur $\overline{AB}$ de 2 façons différentes en utilisant le résultat de la question 3 puis celui de la question 4. En déduire une conclusion.

Exercice 4 :

Soit le champ de scalaires f(x,y,z).

1) Montrer que le $\overrightarrow{grad}$ f est normal aux surfaces de niveaux.

2) Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + 2z^4$.

3) On considère la surface de niveau : $f(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + 2z^4 = cte$. Déterminer le vecteur unitaire de la normale à cette surface de niveau au point M (-1, 1, 1).

4) calculer le Laplacien du champ de scalaires f(x,y,z)

Exercice supplémentaire :

On considère 3 vecteurs quelconques $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ et un champ de scalaires f(x,y,z) quelconque (Choisissez des composantes des vecteurs à votre manière)

Vérifier les identités suivantes qu'il faut retenir.

1) $(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3} = (\vec{V_1} \cdot \vec{V_3})\vec{V_2} - (\vec{V_1} \cdot \vec{V_2})\vec{V_3}$

2) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{0}$ $(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0})$

3) $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V_i} = 0$ $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V_i} = 0)$