École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2014/2015

Contrôle continu de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Problème:

Partie 1 :

Dans le plan (O,x,y,z) d'un repère R(O,x,y,z) cartésien de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, un point matériel M se déplace sur un cercle de rayon a et de centre C (voir figure 1). A l'instant t=0, M se trouve en A de coordonnées A(2a,0,0) et possède la vitesse v_0. On désigne par r et θ les coordonnées polaires de M.

L'équation de la trajectoire de M en coordonnées polaires est donnée par la relation suivante : $r(\theta)=2a\cos(\theta)$. On désigne aussi par $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta}\right)$ la base polaire et $\left(\vec{u_t},\vec{u_n}\right)$ la base de Frenet.

1) Représenter sur la figure 1, la base polaire $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta}\right)$ et la base de Frenet $\left(\vec{u_t},\vec{u_n}\right)$ de M. Justifier que l'angle entre les deux vecteurs $\widehat{\left(\vec{e_\theta},\vec{u_t}\right)}=\widehat{\left(-\vec{e_r},\vec{u_n}\right)}$ vaut θ ($\theta=\widehat{\left(\vec{e_\theta},\vec{u_t}\right)}=\widehat{\left(-\vec{e_r},\vec{u_n}\right)}$).

2) Déterminer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes radiale et ortho-radiale des vecteurs vitesse $\vec{V}(M/R)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M dans son mouvement par rapport à R.

3) Soit s(t) l'abscisse curviligne de M à l'instant t. Préciser le sens du mouvement sur la figure et déterminer l'expression de s en fonction de θ.

4) Déterminer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes normale et tangentielle des vecteurs vitesse $\vec{V}(M/R)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M dans son mouvement par rapport à R.

5) Exprimer les vecteurs unitaires de la base de Frenet $\left(\vec{u_t},\vec{u_n}\right)$ en fonction des vecteurs unitaires de la base polaire $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta}\right)$.

6) En déduire avec une autre méthode les composantes radiale et ortho-radiale des vecteurs vitesse $\vec{V}(M/R)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M dans son mouvement par rapport à R.

<u>Partie 2 :</u>

Dans le plan (O,x,y) d'un repère R(O,x,y,z) cartésien de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le même cercle vertical de rayon a et de centre C tourne à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ autour d'un axe vertical Oz, O étant un point fixe du cercle. On désigne par R(O,x,y,z) le repère cartésien de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et R'(C,x',y',z') le repère lié au cercle mobil par rapport à R de base $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

Un point matériel M initialement en B, parcourt la circonférence du cercle dans le sens positif. Il est repéré par l'angle $\theta_2 = \omega_2 t$, où t est le temps et ω_2 vitesse angulaire constante. (voir figure 2).

1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R'/R)$.

2) Repérer le mobile M dans R'.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

5) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R')

6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

Figure 1

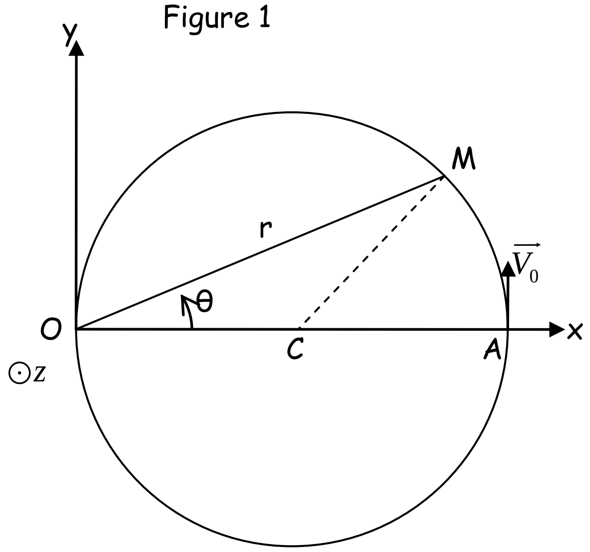
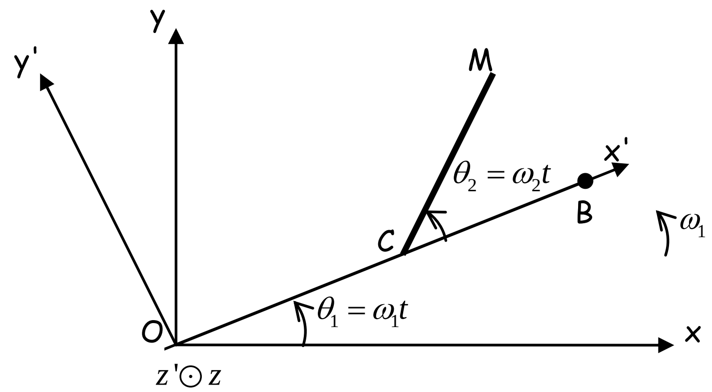


Figure 2



École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2014/2015

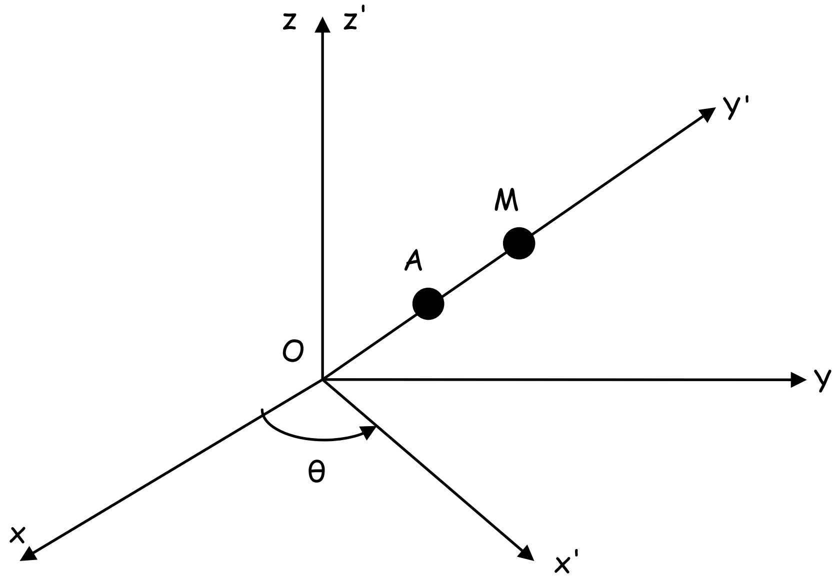
Examen final de la mécanique du point matériel

Durée : 1h 45min

Problème I:

Un repère orthonormé $R'(O,x',y',z')$ de base $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ est en rotation uniforme avec la vitesse angulaire ω par rapport au repère Galiléen $R(O,x,y,z)$ de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, autour de Oz. Les axes verticaux Oz et Oz' des deux repères sont confondus. A est un point fixe sur Oy' tel que $\overrightarrow{OA}=a\vec{j}'$ (a est une constante strictement positive).

Un point matériel M, de masse m, se déplace sans frottement sur Oy' (voir la figure). ($\overrightarrow{OM}=r\vec{j}'$ où r est variable). Il est soumis dans le repère $R(O,x,y,z)$ à la force $\vec{f}=-\lambda m\omega^2\overrightarrow{AM}$ (λ est une constante strictement supérieure à 1), à son poids et à la force de réaction de l'axe Oy' ($\vec{F}_{réaction}=F_{x'}\vec{i}'+F_{y'}\vec{j}'+F_{z'}\vec{k}'$).



1) Dans le repère mobil $R'(O,x',y',z')$, établir l'inventaire des forces auxquelles est soumis le point matériel M.

2) Ecrire sous forme vectorielle, la relation fondamentale de la dynamique appliquées au point matériel M dans le repère $R'(O,x',y',z')$.

3) Justifier le choix de la base du repère $R'(O,x',y',z')$ pour projeter l'équation vectorielle précédente.

4) Exprimer l'ensemble des vecteurs figurant dans l'équation vectorielle, dans la base $\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$.

5) a) En déduire l'équation différentielle du mouvement de M sur Oy'.

b) Déterminer l'équation horaire du mouvement r(t) avec les conditions initiales suivantes : r(t=0)=b ;(b étant la position d'équilibre relatif de M sur Oy', que l'on déterminera en fonction de λ et a) et $\dot{r}(t=0)=v_0$.

6) Déterminer les composantes $F_{x'}$, $F_{y'}$ et $F_{z'}$ de la réaction $\vec{F}_{réaction}$.

7) Déterminer la vitesse du mobile M dans son mouvement par rapport au repère $R(O,x,y,z)$. (On exprimera ses composantes dans la base de $R'(O,x',y',z')$).

8) En déduire la puissance mécanique P(t) nécessaire pour vaincre la réaction $\vec{F}_{réaction}$ à l'instant t.

Problème II:

Une particule M de masse m décrit une trajectoire elliptique relativement au référentiel cartésien R(O,x,y,z) de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, d'excentricité e, de demi-axes a et b (a > b), de centre O et repérée dans R(O,x,y,z) par : $\overrightarrow{OM} = a\cos(\omega t)\vec{i} + b\sin(\omega t)\vec{j}$.

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires du mobile M.

2) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du mobile M dans son mouvement par rapport au repère R(O,x,y,z).

3) a) Montrer que la résultante des forces appliquée au mobile M dans le repère R(O,x,y,z), dérive d'une énergie potentielle U que l'on déterminera en fonction de m, ω et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

b) En déduire le travail de la résultante lorsque le mobile se déplace de M_1 ($r_1 = \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|$) vers M_2 ($r_2 = \left\|\overrightarrow{OM_2}\right\|$).

4) a) Calculer le rapport des énergies cinétiques du mobile en A (où A définit la position de M pour t=0) et en B (où A définit la position de M pour ωt=$\frac{\pi}{2}$) en fonction de l'excentricité de la trajectoire e.

b) Vérifier le théorème de l'énergie cinétique entre A et B.

5) Vérifier le principe de conservation de l'énergie mécanique.

6) En déduire la position du mobile M où l'énergie se répartit en quantités égales sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

(Indication : il faut considérer dans cette question que l'énergie potentielle U(r=0)=0)

Problème supplémentaire :

Soit R(O,x,y,z) un repère cartésien fixe de la base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Une tige rigide T faisant un angle θ constant avec l'axe Oz, tourne par rapport à celui-ci avec une vitesse angulaire ω constante. L'une des extrémités O_1 de la tige reste dans le plan (O,x,y) à une distance l fixe par rapport à O ($l = \|\overrightarrow{OO_1}\|$). Le mouvement de la tige est repéré dans R par l'angle $\varphi = \widehat{(\vec{i},\vec{u})}$=ωt. On associe à la tige le référentiel mobile R_1 d'origine O_1 et de base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$ tel que $\overrightarrow{e_r}$ est colinéaire à la tige et $\overrightarrow{e_\varphi} = \vec{k} \wedge \vec{u}$. Un petit anneau de masse m, au départ immobile en O_1, coulisse sans frottement le long de la tige T. (Figure 1 et 2)
La position de l'anneau est repérée dans R_1 , à chaque instant t, par la distance r(t)= $\|\overrightarrow{O_1M}\|$.

On rappelle que, dans le cas général, le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à la base cartésienne est égal à : $\vec{\Omega}(R_1 / R) = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\vec{k}$.

Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$.

1) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de M.
2) Déterminer par ses composantes dans la base de R_1, les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.
3) Déterminer par ses composantes dans la base de R_1, les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.
4) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement.
5) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.
6) Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans R (on donne l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g_0\vec{k}$).
7) Déduire l'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige.
8) Donner l'expression des composantes de la réaction de la tige sur M en fonction de m, g_0, l, ω, θ et t.
9) A quelle condition ces composantes sont elles indépendantes du temps ?

Figure 1

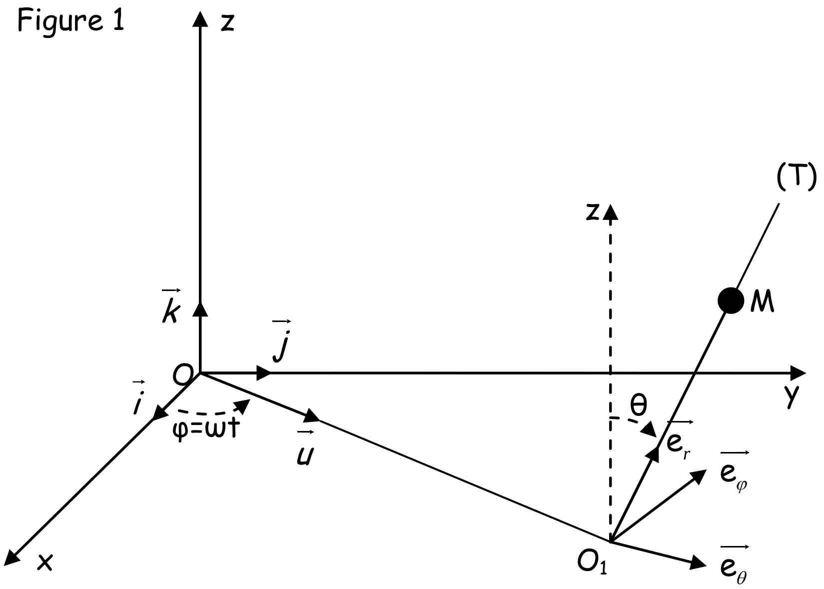


Figure 2