École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2013/2014

Contrôle continu de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Exercice 1:

On désigne par R(O,x,y,z) repère cartésien de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Un point matériel M est repéré par le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = t\vec{i} + at^2\vec{j}$ où a est une constante positive et t le temps.

1) Trouver l'équation de la trajectoire de M dans le repère R et donner graphiquement l'allure de cette trajectoire.

2) Déterminer les composantes cartésiennes et le module du vecteur vitesse et vecteur accélération.

3) Donner sous forme d'intégrale, l'abscisse curviligne s(t) du point matériel à l'instant t sachant qu'au temps t=0, s(t=0)=0.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de Frenet, le vecteur vitesse et du vecteur accélération.

5) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire du mobile par deux méthodes.

6) Donner les coordonnées polaires du mobile M.

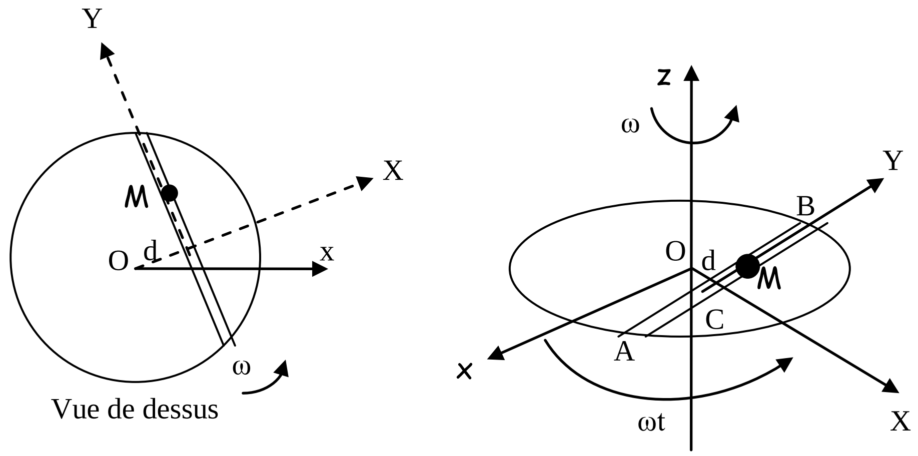
7) Dans le même repère cartésien, un autre mobile P est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tel que $\overrightarrow{OP} = t\vec{i} + bt\vec{j}$ où b est une constante positive et t le temps.

   a) Quelle est la nature du mouvement du mobile P.

   b) Trouver les coordonnées du point de rencontre des deux mobiles M et P.

Exercice 2:

Sur la face supérieure d'un disque horizontal, de centre O, est creusée une rainure AB parallèlement à un diamètre, à la distance de O. Une masse ponctuelle M coulisse dans cette rainure. Dans le référentiel fixe R(O,x,y,z), repère cartésien de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on fait tourner le disque à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Oz. Et soit R'(C,x',y',z') le repère lié au disque, de base $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$, mobil par rapport au repère R. Ce référentiel du repère mobil, d'origine C est tel que CY est porté par la rainure. La position de M dans le repère mobil R' est repérée par CM=r(t)=variable. (où t est le temps)



1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}\left(R'/R\right)$.

2) Repérer le mobile M dans R' et dans R.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

5) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R')

6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

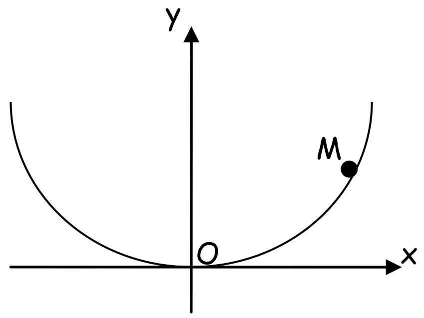
Année universitaire : 2013/2014

Examen final de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Exercice 1:

Un mobile pesant assimilable à un point matériel M de masse m coulisse sans frottement sur l'arc de cycloïde ci-contre. On repère sa position par les coordonnées cartésiennes x et y sur les axes Ox horizontal et Oy vertical dirigé vers le haut. L'équation paramétrique de cycloïde est : $x(\theta)=b(\theta+\sin(\theta))$ et $y(\theta)=b(1-\cos(\theta))$ où b est une constante et θ une variable dont la variation entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ engendre l'arc. On note g l'accélération de la pesanteur.



1) Exprimer les coordonnées (dx, dy) d'un déplacement élémentaire du mobile $d\left(\overline{OM}\right)$ en fonction de b et θ.

2) En déduire la longueur de l'abscisse curviligne élémentaire ds de ce déplacement.

3) En déduire que l'abscisse curviligne $s=\widehat{OM}$ comptée positivement vers le haut de la droite est $s(\theta)=4b\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

4) En déduire aussi les expressions des vecteurs unitaires de la base de Freinet $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ en fonction de la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

5) Montrer que l'énergie potentielle associée à la force totale subie par le mobile est : $E_p=\frac{mgs^2}{8b}$.

6) Exprimer l'énergie mécanique totale du mobile en fonction de s et $\dot{s}$.

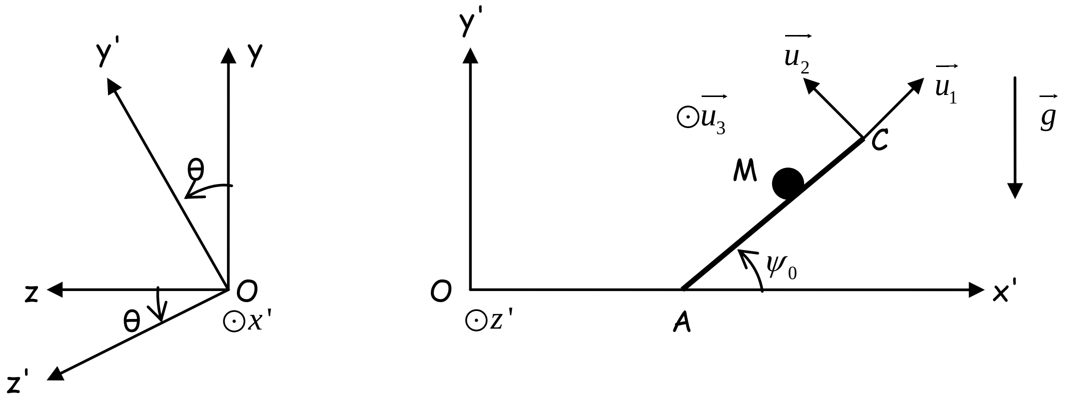
7) Dériver par rapport au temps cette expression et en déduire une équation différentielle d'un mouvement sinusoïdale dont on précisera la période d'oscillation en fonction de b et g.

8) Retrouver cette équation différentielle en utilisant le principe fondamentale de la dynamique (projeter sur la base intrinsèque de Freinet).

Exercice 2:

Un repère orthonormé $R'(O,x',y',z')$ de base $\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$ est en rotation uniforme autour de l'axe Ox', avec une vitesse angulaire constante ω par rapport à un repère Galiléen $R(O,x,y,z)$ de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Les axes de Ox et Ox' de ces deux repères sont confondus.

Une barre rigide AC de longueur a est toujours lié au plan (O,x',y') et faisant un angle $\psi_0 = \left(\vec{i}',\vec{u_1}\right) = \left(\overrightarrow{Ax'},\overrightarrow{AM}\right)$ constant avec Ox'. Elle effectue un mouvement tel que $\overrightarrow{OA} = b\vec{i}'$ où b est une constante. Sur la tige AC se trouve une bille M assimilée à un point matériel. (figure)



1) On suppose que la bille est immobile en C. Repérer la bille M dans R' et dans R et déduire la nature de sa trajectoire dans chacun des deux repères.

2) La bille de masse m glisse maintenant sans frottement sur la tige. Le mouvement est repéré par AM=r avec r variable.

Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right)$.

a) Déterminer les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement de la bille M.

b) Déterminer les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis de la bille M.

c) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue de la bille en utilisant la méthode de composition de mouvement.

d) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

3) Dans le repère R, la bille est soumise à deux forces : le poids P=mg et la force de réaction de la tige $F_{réaction}$.

(On note (F_1,F_2,F_3) les composantes de $\vec{F}_{réaction}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right)$).

a) Ecrire l'expression du principe fondamentale de la dynamique appliquée à la bille dans le repère R.

b) En déduire par une simple projection de l'équation vectorielle précédente suivant $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$:

i) L'équation du mouvement de la bille traduisant une relation entre les paramètres r, $\ddot{r}$, g, θ, ω et ψ_0.

ii) Les composantes de la force de réaction $\overrightarrow{F}_{réaction}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ en fonction de m, r , $\ddot{r}$, g, θ, ω et ψ_0.