École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2012/2013

Contrôle continu de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Exercice 1:

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe (Oxyz) par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) telles que θ=ωt et z=hθ. (r et ω sont des constantes positives et t le temps)

1) Construire le schéma du point M dans la base cylindrique.

2) Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cylindriques dans la base $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$, et montrer que le vecteur accélération est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

3) Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes dans la base $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

4) Quelle est la trajectoire du point M dans le plan xOy et suivant la direction de l'axe Oz ?

5) Déterminer les composantes cartésiennes et le module des vecteurs vitesse et accélération.

6) Calculer l'abscisse curviligne s(t) du point M sachant que dS=Vdt, et à l'instant initial t=0, s(t)=0.

7) Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération selon les vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$ du trièdre de Frenet ?

8) Calculer le rayon de courbure ρ de la trajectoire de m.

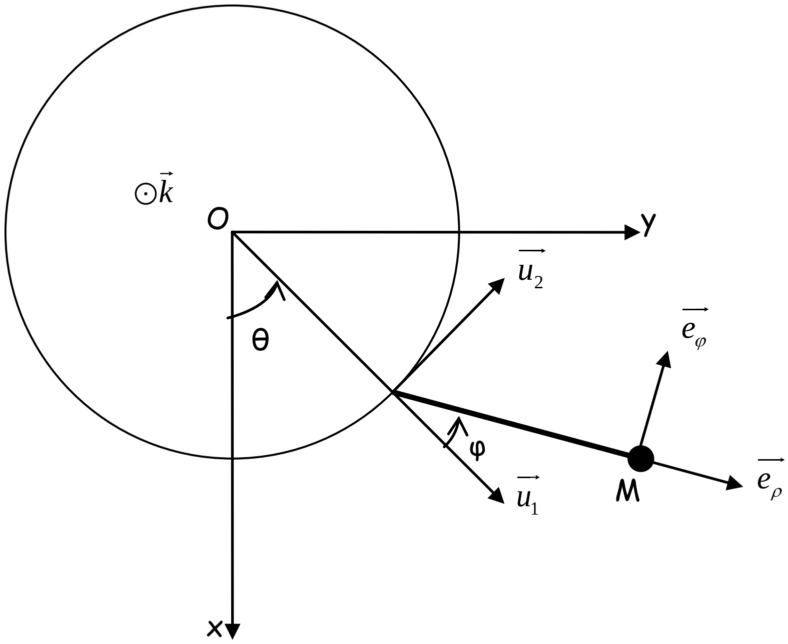
9) Montrer que la vitesse fait un angle constant α avec l'axe Oz, et le calculer.

Exercice 2:

On considère un pendule simple formé d'un point matériel M attaché à une tige de masse négligeable et de longueur l. Le point O_1, de suspension du pendule, se déplace avec une vitesse angulaire constante sur un cercle vertical fixe de centre O et de rayon r. (voir la figure).

Soit $R_1\left(O_1,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\vec{k}\right)$ un repère relatif en rotation par rapport au repère du laboratoire $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ avec une vitesse angulaire ω constante. (on pose $\theta=\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{u_1}}\right)$)

La particule M est repéré dans R_1 par l'angle $\varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{e_\rho}}\right)$. La base $\left(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k}\right)$ est mobile dans R_1 et $\overrightarrow{OM}=\ell\overrightarrow{e_\rho}$.



1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}\left(R_1/R\right)$.

2) Repérer le mobile M dans R_1 et dans R.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R_1, les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de R_1, les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

5) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R_1)

6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

École Nationale

Des Sciences

Appliquées Kénitra

(ENSAK)

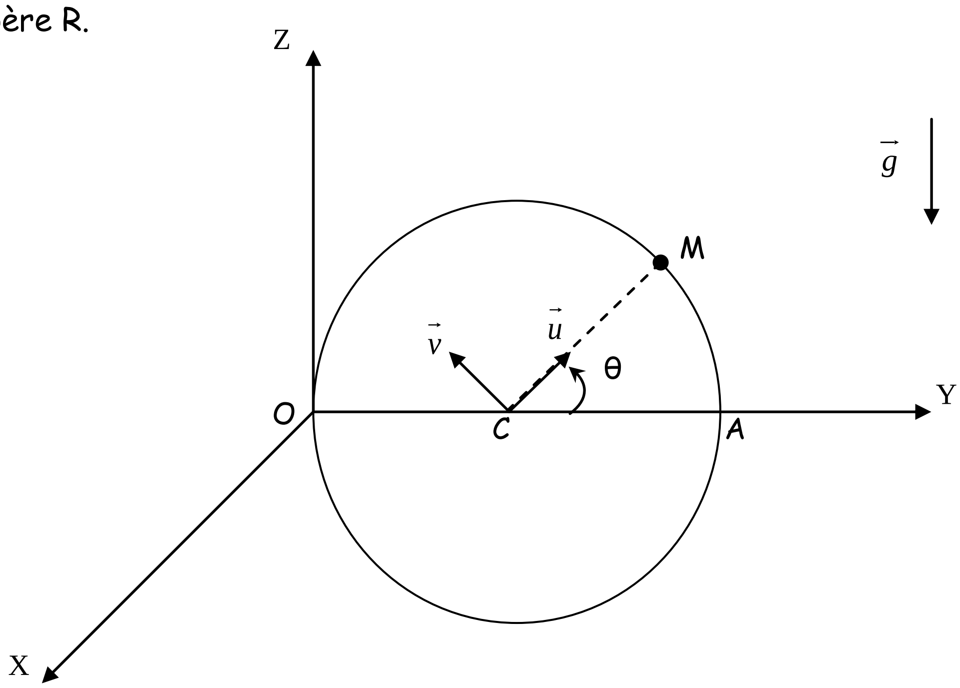
Année universitaire : 2012/2013

Examen final de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

PROBLEME I:

Un cercle vertical de centre C et de rayon a tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel terrestre R(O,x,y,z) supposé galiléen. Un anneau M, assimilable à un point matériel de masse m, peut coulisser sans frottement sur ce cercle. La position de M sur le cercle est repérée par l'angle θ. Soit le référentiel fixe R(O,x,y,z), repère cartésien de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.(non représenté sur la figure). Soit R'(C,X,Y,Z) le repère lié au cercle d'origine C et de base $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)=\left(\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$, mobil par rapport au repère R.



1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}\left(R'/R\right)$.

2) Repérer le mobile M dans R' et dans R.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

5) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R')

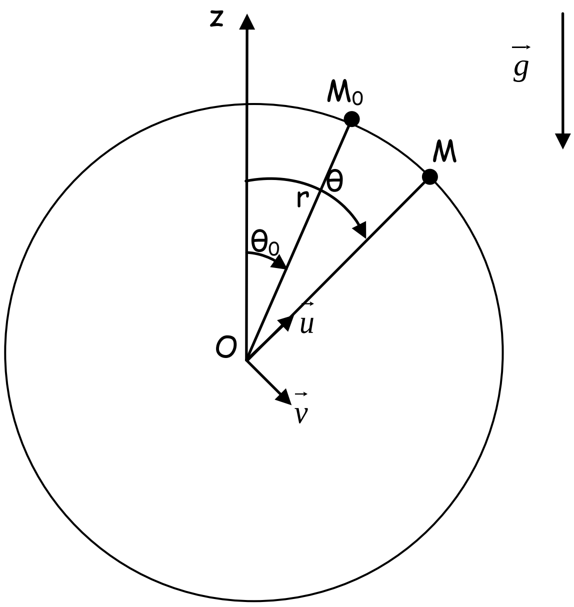
6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

7) En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R' lié au cercle, quelle base de projection est-il préférable de choisir ? justifier ce choix.

8) En déduire 3 équations (sans chercher à les intégrer).

PROBLEME II:

Une particule M de masse m est lancée du point M_0, de cote $z_0=r\cos\theta_0$, d'une sphère de centre O et de rayon r, avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ (tangente à la sphère et contenue dans le plan vertical passant par O). Elle glisse sans frottement sur la sphère.



1) Calculer la vitesse de la particule M en fonction de θ et des paramètres g, r, v_0 et θ_0.

2) Calculer la réaction du support sur la particule en fonction de θ et des paramètres m, g, r, v_0 et θ_0.

3) Montrer que si $v_0 \geq V$, la particule quitte la sphère dès le départ en M_0. On déterminera V.

4) La particule est lâchée de M_0 avec une vitesse $v_0 = \frac{V}{2}$. Déterminer l'angle pour lequel la particule quittera la sphère.

5) Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du mobile. On prendra l'énergie potentielle nulle pour θ=90°.

6) Justifier la conservation d'énergie mécanique et en déduire son expression.