École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2011/2012

Contrôle continu de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Exercice 1:

Un point matériel M mobile par rapport au repère fixe $R\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ est repéré par ses coordonnées cylindriques ρ, φ, z_M telles que $\rho = C$, $\varphi = \omega^2 t^2$, $z_M = a\omega^2 t^2$ où C, a et ω sont des constantes positives.

1) Donner l'expression vectorielle du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère cylindrique $R_C\left(O,\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z}\right)$, sphérique $R_S\left(O,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi}\right)$ et cartésienne $R\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$.

2) Déterminer dans le repère cylindrique ; les composantes des vecteurs vitesse et accélération du mobile dans son mouvement par rapport au repère R.

3) En déduire leurs modules et conclure.

4) Calculer la longueur parcourue par le mobile sur sa trajectoire entre les instants t_1=10 secondes et t_2=20 secondes.

5) Soit $\overrightarrow{e_t}$ un vecteur unitaire tangent à la trajectoire en tout point.

a) Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{e_t}$ dans le repère cylindrique.

b) Déterminer l'expression du vecteur $\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_t}}{dt}\right|_R$ dans le repère cylindrique.

6) Soit le vecteur accélération du mobile M dans le repère du Frenet : $\vec{\gamma}(M/R) = \overrightarrow{\gamma_n} + \overrightarrow{\gamma_t}$.

a) Exprimer dans la base cylindrique, les expressions vectorielles des vecteurs d'accélération tangentielle $\overrightarrow{\gamma_t}$ et d'accélération normale $\overrightarrow{\gamma_n}$.

b) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire et déduire la nature de la trajectoire.

c) En déduire la norme du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ et la comparer avec celle trouvée en question 3.

Exercice 2:

On considère un cercle de centre C et de rayon a placé dans un plan vertical.

Soit R(O,x,y,z) un repère fixe de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et R'(O,X,Y,Z) de base $\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$un référentiel mobile lié au cercle. Ce cercle est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical OY à la vitesse angulaire constante ω_1 relativement à R. La distance du centre C à la droite verticale OY est OC=2a. Un point M du cercle est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_2 relativement à R'.

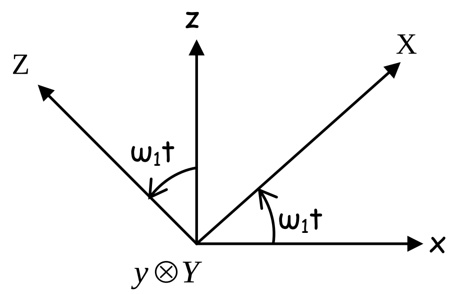
1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}\left(R'/R\right)$.

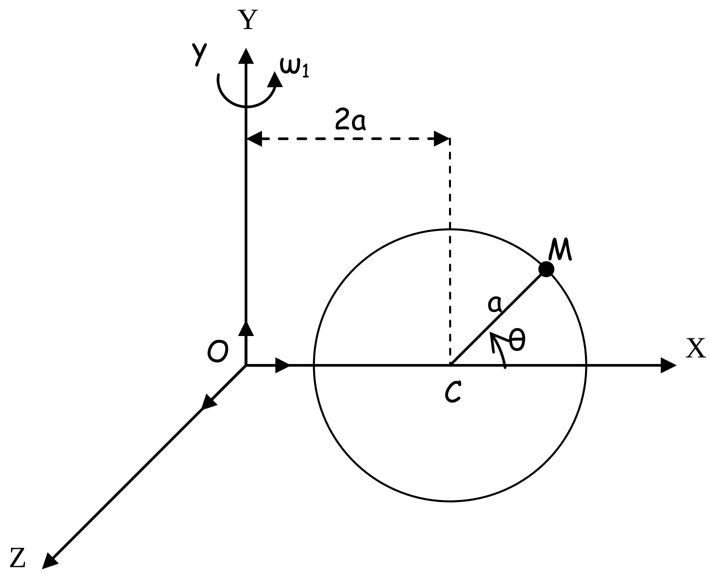
2) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

4) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R')

5) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.





École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2011/2012

Examen final de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Problème:

On envisage un point matériel M de masse m, guidé sur un cercle de centre C et de rayon a sur lequel il est mobile sans frottement.

Le cercle est maintenu en rotation à vitesse angulaire ω constante, autour d'un axe vertical fixe dans le référentiel R(O,x,y,z) du laboratoire supposé galiléen.

L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e_z}$. On appellera R_T(O,x',y',z') le référentiel relatif lié au cercle, rapporté au repère cylindrique de base $\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}\right)$. C est le centre du cercle du guidage, on note $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CM}}\right)$ l'inclination de CM par rapport à la verticale. (voir les figures).

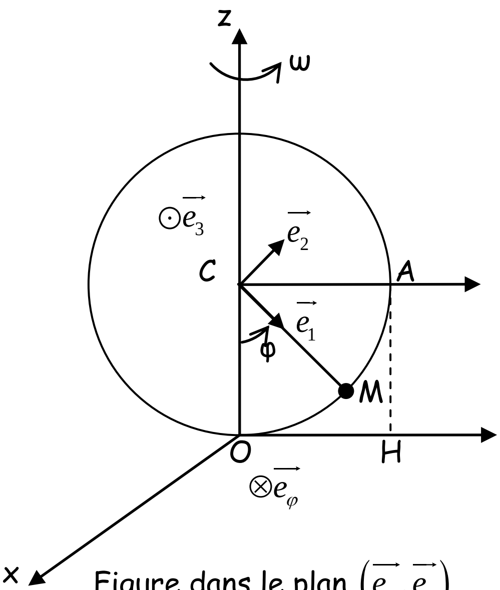
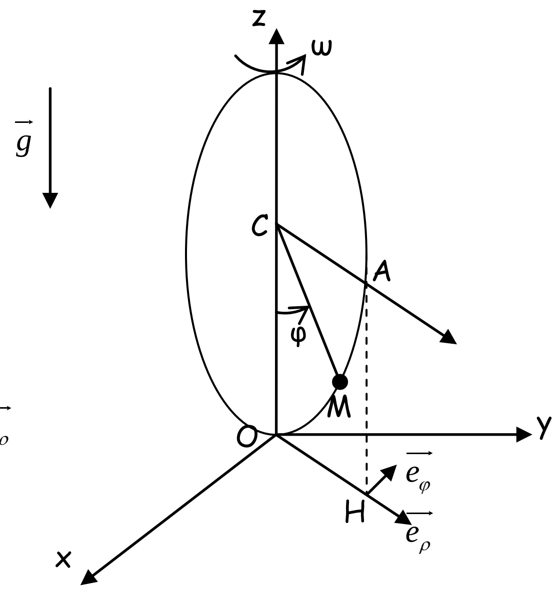


Figure dans le plan $\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_z}\right)$



On désigne par R(O,x,y,z) repère cartésien de base $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ et R_T(O,x',y',z') le repère mobil par rapport à R de base $\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}\right)$.

1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_T / R)$.

2) Repérer le mobile M dans le référentiel R_T.

3) Déterminer par ses composantes dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$, les vecteurs vitesse absolue, et accélération absolue du point matériel M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$, les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

5) Déterminer par ses composantes dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$, les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$).

7) Faire l'inventaire des forces appliquées au mobile M dans le repère $R_T(O,x',y',z')$ et les exprimer dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$.

(On donne la force de réaction du guide circulaire sur le mobile M : $\vec{F} = F_1\vec{e_1} + F_2\vec{e_2} + F_3\vec{e_3}$).

8) Justifier que le déplacement élémentaire du M vaut : $d\overrightarrow{OM} = a\sin(\varphi)d\varphi\vec{e_z} + a\cos(\varphi)d\varphi\vec{e_\rho}$.

9) On suppose que toutes les forces appliquées au mobile M dans le référentiel $R_T(O,x',y',z')$ sont conservatives et que l'origine de l'énergie potentielle est nulle pour φ=0 ($E_p(\varphi=0)=0$). Montrer que l'énergie potentielle de M dans le repère $R_T(O,x',y',z')$ s'écrit :

$$E_p(\varphi) = mga(1-\cos(\varphi)) - \frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2(\varphi)$$

10) La position φ=0 est-elle une position d'équilibre ? si oui, discuter sa stabilité.

11) Déterminer l'énergie cinétique E_c du mobile M dans son mouvement par rapport au repère $R_T(O,x',y',z')$.

12) En déduire l'énergie cinétique E_m du mobile M dans son mouvement par rapport au repère $R_T(O,x',y',z')$.

13) En dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps et en considérant l'angle φ petit, déterminer l'équation différentielle du mouvement et donner la condition suffisante pour que le mouvement de M dans $R_T(O,x',y',z')$ soit oscillatoire.

14) En considérant que la condition précédente est satisfaite, donner alors la période d'oscillation du mouvement de M dans $R_T(O,x',y',z')$ et son équation horaire φ(t). (avec les conditions initiales suivantes : à t=0, φ(t=0)=0 et $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{a}$).