Année universitaire : 2010/2011

Contrôle continu de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Exercice 1:

Dans le plan (O,x,y,z) d'un repère R(O,x,y,z) cartésien de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point matériel M se déplace sur un cercle de rayon a et de centre C (voir figure 1). A l'instant t=0, M se trouve en A de coordonnées A(2a,0,0) et possède la vitesse v_0. On désigne par r et θ les coordonnées polaires de M.

1) Montrer que l'équation de la trajectoire de M en coordonnées polaires est donnée par la relation suivante : $r(\theta) = 2a\cos(\theta)$.

2) Représenter sur la figure, la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ de M.

3) Déterminer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes radiale et ortho-radiale des vecteurs vitesse $\vec{V}(M/R)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M dans son mouvement par rapport à R.

4) Soit s(t) l'abscisse curviligne de M à l'instant t. Préciser le sens du mouvement sur la figure et déterminer l'expression de s en fonction de θ.

5) représenter sur la même figure la base de Serret-Frenet $(\vec{u_t}, \vec{u_n})$ de M.

6) Déterminer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes normale et tangentielle des vecteurs vitesse $\vec{V}(M/R)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M dans son mouvement par rapport à R.

7) Exprimer les vecteurs unitaires de la base de Frenet $(\vec{u_t}, \vec{u_n})$ en fonction des vecteurs unitaires de la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

8) En déduire avec une autre méthode les composantes radiale et ortho-radiale des vecteurs vitesse $\vec{V}(M/R)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M dans son mouvement par rapport à R.

Exercice 2:

Un système formé par une tige de longueur d=OC et un disque de centre C et de rayon a solidaires entre eux, tourne uniformément autour d'un axe perpendiculaire au plan (yOz), à la vitesse angulaire ω_1 constante. Sur la face verticale du disque, on fixe un tube cylindrique de faible section, de longueur a, une extrémité en C et l'autre extrémité à son haut (figure 2). Une masse ponctuelle peut coulisser à l'intérieur du tube. Elle est repérée par CM=r(t)=variable (où t est le temps) et par l'angle $\theta = \theta_0 = cte$.

On désigne par $R(O,x,y,z)$ repère cartésien de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et $R'(C,x',y',z')$ le repère mobil par rapport à R de base $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$.

1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}\left(R'/R\right)$.

2) Repérer le mobile M dans R'.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

5) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R')

6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

Figure 1

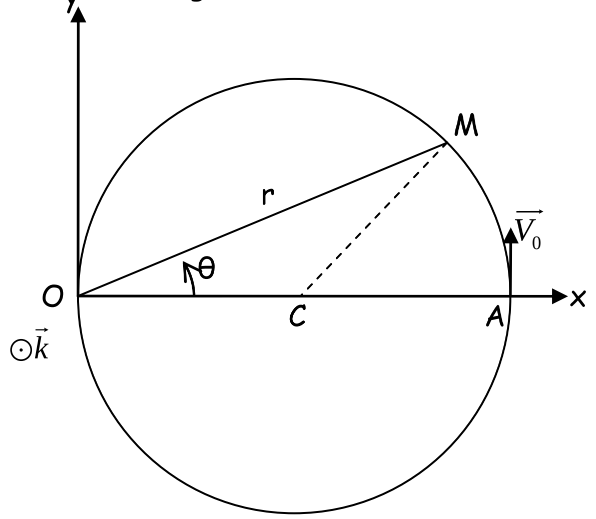
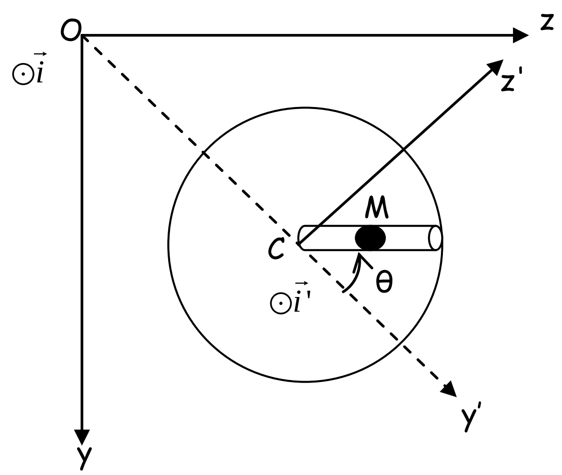


Figure 2



École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2010/2011

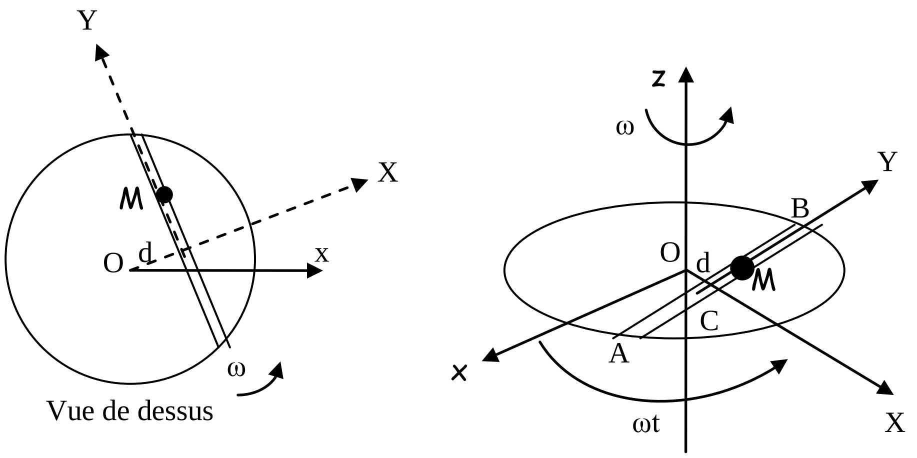
Examen final de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Exercice 1:

Sur la face supérieure d'un disque horizontal, de centre O, est creusée une rainure AB parallèlement à un diamètre, à la distance de O. Une masse ponctuelle m coulisse sans frottement dans cette rainure. Dans le référentiel fixe R(O,x,y,z), repère cartésien de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on fait tourner le disque à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Oz. Et soit R'(C,x',y',z') le repère lié au disque, de base $\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)$, mobil par rapport au repère R. Ce référentiel du repère mobil, d'origine C est tel que CY est porté par la rainure. La position de M dans le repère mobil R' est repérée par CM=r(t)=variable. (où t est le temps).

Si $\vec{F_R}$ est la force de réaction de la rainure sur le mobile, on a : $\vec{F_R}.\vec{j}'=0$. (condition de mouvement de M sans frottement).



1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}\left(R'/R\right)$.

2) Repérer le mobile M dans R' et dans R.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

5) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R')

6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

7) En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au disque, Déterminer 3 équations.

Exercice 2:

Dans le plan (O,x,y,z) d'un repère R(O,x,y,z) cartésien de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, un mobile M de masse m est assujetti à décrire une courbe plan d'équation en coordonnées polaire : $r(\theta)=\frac{1}{2}r_0\left(1+\cos\theta\right)$, r_0 désignant une longueur donnée. Il est soumis à l'action d'une seule force $\vec{F}=2k^2r_0\vec{e_r}$, où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{OM}$ et k une constante positive.

Le mobile est abandonné sans vitesse initiale en un point où $\theta=\theta_0$ de cette courbe.

1) Quelle est l'allure de la trajectoire ?

2) Déterminer par ses composantes dans la base polaire $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta}\right)$, le vecteur vitesse du mobile M dans son mouvement par rapport à R.

3) Montrer que l'énergie cinétique du mobile dans son mouvement par rapport à R, peut s'écrire sous la forme : $E_c=\frac{1}{2}mr_0^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$.

4) Déterminer l'énergie potentielle U(r) du mobile. On prendra l'énergie potentielle nulle pour r=0.

5) Justifier la conservation d'énergie mécanique et déduire par une simple dérivation de cette dernière par rapport au temps, l'équation du mouvement du mobile. En déduire aussi la variation de θ en fonction de temps.