École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2009/2010

Contrôle continu de la mécanique du point matériel

Durée : 1h 45min

Exercice 1:

Dans un repère (O,x,y,z) rapporté à une base de coordonnées cartésiennes, un point M décrit une trajectoire définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 2e^{\omega t}\sin(\omega t) \\ y = 2e^{\omega t}\cos(\omega t) \\ z = e^{\omega t} \end{cases}$$

On peut poser : θ=ωt.

1) Déterminer l'équation de la courbe décrite par la projection m du point M dans le plan (O,x,y,z) en coordonnées polaires (r,θ).

(L'équation obtenue est l'équation polaire d'une spirale exponentielle).

2) Etablir l'expression de l'abscisse curviligne s(θ) sur la trajectoire de M et sa valeur à θ=1rad. (s(0)=0).

3) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M.

4) Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec l'axe Oz.

5) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire pour θ=1rad.

6) Ecrire l'expression des vecteurs vitesse absolue et accélération absolu du point M dans le repère de Serret-Frenet $R\left(M,\vec{t},\vec{n},\vec{b}\right)$.

Exercice 2:

Soit R(O,x,y,z) un repère cartésien fixe de la base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Une tige rigide T faisant un angle θ constant avec l'axe Oz, tourne par rapport à celui-ci avec une vitesse angulaire ω constante. L'une des extrémités O_1 de la tige reste dans le plan (O,x,y) à une distance l fixe par rapport à O ($l = \left\|\overrightarrow{OO_1}\right\|$). Le mouvement de la tige est repéré dans R par l'angle $\varphi = \widehat{\left(\vec{i},\vec{u}\right)}$=ωt. On associe à la tige le référentiel mobile R_1 d'origine O_1 et de base orthonormée directe $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}\right)$ tel que $\vec{e_r}$ est colinéaire à la tige et $\vec{e_\varphi} = \vec{k} \wedge \vec{u}$. Un petit anneau de masse m, au départ immobile en O_1, coulisse sans frottement le long de la tige T. (Figure 1 et 2) La position de l'anneau est repérée dans R_1 , à chaque instant t, par la distance r(t)=$\left\|\overrightarrow{O_1M}\right\|$.

On rappelle que, dans le cas général, le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à la base cartésienne est égal à : $\vec{\Omega}\left(R_1 / R\right) = \dot{\theta}\vec{e_\varphi} + \dot{\varphi}\vec{k}$.

Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}\right)$.

1) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}\left(R_1 / R\right)$.

2) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de M.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R_1, les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

4) Déterminer par ses composantes dans la base de R_1, les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

5) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement.

6) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

Figure 1

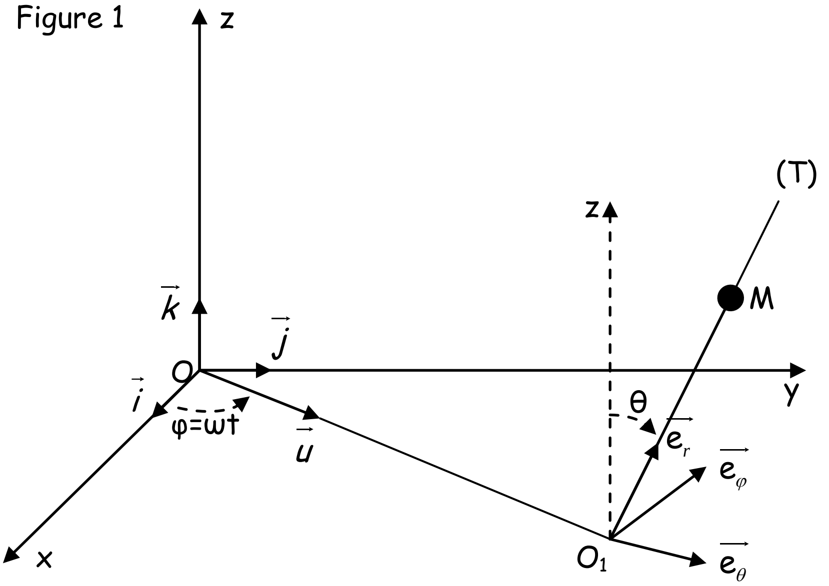
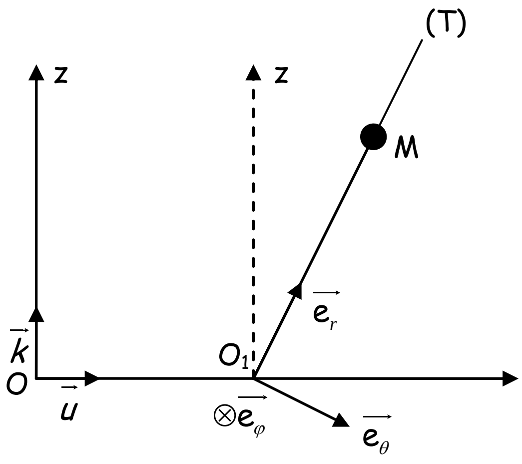


Figure 2



École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire : 2009/2010

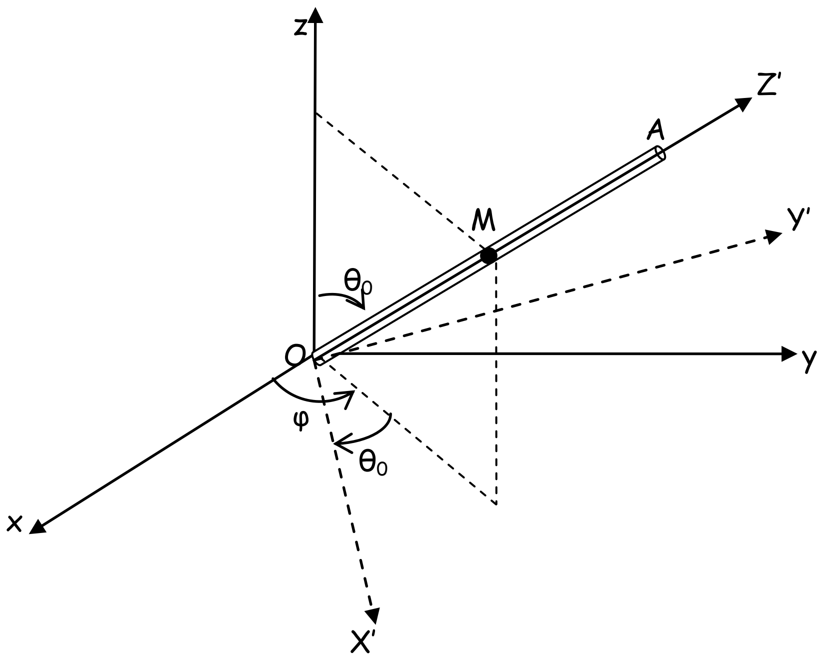
Examen final de la mécanique du point matériel

Durée : 2 heures

Exercice 1:

Un tube cylindrique mince OA, incliné par rapport à l'horizontale d'un angle θ_0 constant tourne autour de la verticale Oz à la vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Un point matériel M de masse m, assujetti à se déplacer sans frottement dans ce tube, est initialement au repos à la distance d de O, intersection de l'axe vertical de rotation avec le tube.

Soient R(O,x,y,z) le référentiel fixe supposé galiléen de base $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$, constitué de l'axe vertical de rotation Oz et les axes Ox et Oy du plan horizontal ; et R'(O,X',Y',Z') le référentiel mobil de base $\left(\overrightarrow{e_{X'}}, \overrightarrow{e_{Y'}}, \overrightarrow{e_{Z'}}\right)$, lié au tube cylindrique d'axes OZ' portant OA, OY' dans le plan xOy et OX' complétant le trièdre direct (OX',OY',OZ'). (voir la figure).



On repère le point matériel M par $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$.

1) Justifier l'écriture ci-après du vecteur vitesse angulaire de rotation dans la base du repère mobile R' : $\vec{\Omega}(R'/R) = -\omega \sin\theta_0 \overrightarrow{e_{X'}} + \omega\cos\theta_0 \overrightarrow{e_{Z'}}$.

2) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement du point M.

3) Déterminer par ses composantes dans la base de R', les vecteurs accélération relative, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis du point M.

4) Déduire les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode composition de mouvement. (les exprimer dans la base de R')

5) Retrouver les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue en utilisant la méthode de dérivation directe du rayon vecteur et vecteur vitesse absolue.

6) En plus des forces réelles (le poids et la réaction du tube) appliquées au point matériel M, on ajoute la force réelle $\vec{F} = -k(r-a)\overrightarrow{e_{Z'}}$ (où k et a sont des constantes positives).

a) Ecrire l'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique appliqué au point matériel M, dans le référentiel mobil R'.

b) En projetant sur un axe convenablement choisi, déterminer l'équation différentielle du mouvement.(on ne demande pas de la résoudre).

<u>Exercice 2:</u>

Un pendule circulaire est le système constitué par le point matériel M de masse m, qui se déplace sans frottement sur un guide circulaire vertical de rayon a. Ce mobile M est lancé à partir du point H avec une vitesse initiale v_0 (voir la figure). On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

1) Donner l'expression vectorielle de la loi de la dynamique appliquée à ce point matériel dans le repère R(O,x,y,z) supposé galiléen, et faire les projections de cette expression sur les vecteurs unitaires de la base polaire.

2) En déduire l'équation différentielle du mouvement du système M, dans le cas des petits angles de θ.

3) Retrouver l'équation différentielle du mouvement du système M à partir du théorème du moment cinétique.

4) déterminer l'énergie mécanique E_m du système. (l'origine des énergies potentielles étant prise en O). Justifier que cette dernière est une constante de mouvement.

5) En déduire l'expression de l'intensité de la force de réaction R_1 du guide sur M en fonction de la variable θ uniquement.

6) Déterminer en fonction de g, a et v_0 , l'expression de l'angle maximale θ_{max} atteint par le mobile sur le guide.