

## Exercices d'électrostatique

### I- Calcul direct de champs électrostatiques.

On peut calculer le champ électrostatique par trois méthodes :

- ⇒ De façon directe en utilisant les formules (2) et (3) ci-dessous.
- ⇒ A l'aide du théorème de Gauss dans le cas de distributions de charges présentant des symétries.
- ⇒ De façon indirecte en calculant d'abord le potentiel  $V$  et en suite en utilisant la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$  (voir plus loin).

On doit retenir :

- ⇒ Loi de Coulomb : Force exercée par  $q_0$  (placée en un point  $M$ ) sur une charge  $q$  (placée en un point  $P$ ).

$$\vec{r} = \overrightarrow{MP} ; \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} ; \vec{F}_{q_0q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0q}{r^2} \vec{u} \quad (1)$$

- ⇒ Champ électrostatique créée en un point  $P$  par une charge ponctuelle située en  $M$ .

$$\vec{r} = \overrightarrow{MP} ; \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} ; \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad (2)$$

- ⇒ Champ électrostatique créée en un point  $P$  par une distribution de charges. L'élément de charge  $dq$  est centré sur  $M$ .

$$\vec{E} = \int_D \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \vec{u}}{r^2} \quad (3)$$

$dq = \lambda dl$  ou  $dq = \sigma ds$  ou  $dq = \rho dv$  selon qu'il s'agisse d'une distribution de charges linéique, surfacique ou volumique.

#### EXE 1

Deux charges ponctuelles égales, placées à une distance  $a$  l'une de l'autre, se repoussent avec une force d'intensité  $F$ .

De combien faudrait-il les rapprocher pour que la force de répulsion prenne une intensité double.

#### EXE 2

Aux sommets  $A, B, C, D$  d'un carré de coté  $2a$ , on place respectivement des charges électriques ayant pour valeur  $+q, +2q, -2q$  et  $2q$  ( $q > 0$ ).

Trouver la force électrostatique qui s'exerce sur une charge positive  $q_0$  placée au centre du carré.

#### EXE 3

Deux charges ponctuelles  $+q$  et  $+4q$  sont placées en deux point  $A$  et  $B$  distants de  $a$ . Montrer qu'il existe un point sur la droite  $AB$  où le champ est nul.

#### EXE 4

Deux charges ponctuelles de même valeur  $+q$  sont placées en deux point  $A(-a, 0)$  et  $B(a, 0)$ .

Calculer le champ électrostatique au point  $M(0,y)$ .  
Tracer l'allure de  $E(y)$  pour  $y > 0$ .

**EXE 5**

Une charge ponctuelle  $-2q$  est placée à l'origine  $O$  des coordonnées. Deux charges égales, de valeur  $+q$  sont placées sur l'axe des  $X$  aux points d'abscisse  $-a$  et  $+a$ . Déterminer le champ électrostatique sur les deux axes  $OX$  et  $OY$ .

**EXE 6**

Un segment de droite  $AB$ , de longueur  $2a$ , porte une distribution continue de charges dont la densité linéique supposée positive  $\lambda$  est uniforme (constante). On prend cette droite comme axe des  $X$ ; l'origine  $O$  étant au milieu de  $AB$ . Soit  $OY$  l'axe perpendiculaire à  $OX$ .

1) En considérant deux éléments de charge centrés en deux points  $P_1$  et  $P_2$ , symétriques par rapport à l'origine  $O$ , montrer que le champ électrostatique sur l'axe  $OY$  est porté par ce dernier.

2) Calculer la valeur de ce champ.

3 Examiner ce que devient l'expression obtenue quand la distance  $AB$  augmente indéfiniment.

**EXE 7**

Un anneau fin de rayon  $R$ , porte une densité linéique de charges  $\lambda$  constante. Calculer en tout point  $M$  de l'axe de l'anneau le champ  $E(M)$ .

**EXE 8**

Un disque plan circulaire de rayon  $R$  porte une distribution de charges superficielle uniforme de densité  $\sigma$ . Un point  $M$  de l'axe de révolution du disque est repéré par sa distance  $z$  au centre  $O$ .

1) Calculer  $E(M)$ .

2) En déduire le champ créé par un plan infini.

**EXE 9**

Un plan  $P$  est percé d'une ouverture circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$ . il porte une distribution de charges surfacique uniforme de densité  $\sigma$ .

En utilisant les résultats des exercices précédents et le principe de superposition, calculer le champ électrostatique en un point  $M$  de la droite perpendiculaire à  $P$  et passant par  $O$ .

**II- Théorème de GAUSS**

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal à la somme des charges à l'intérieur de cette surface divisée par la permittivité du milieu où sont placées ces charges.

$$\Phi(\vec{E} / S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Pour appliquer le théorème de Gauss il faut :

- ⇒ Déterminer d'abord la direction du champ  $\vec{E}$  (étude des symétries).
- ⇒ Choisir une surface fermée  $S$  de sorte que  $\vec{E}$  soit perpendiculaire ou parallèle à  $d\vec{S}$  et son module soit constant. Ainsi  $E$  peut sortir de l'intégrale.
- ⇒ Calculer  $Q_{int}$ .

⇒ Faire l'égalité des deux membres de la relation (4) et en déduire  $E$ .

### EXE 10

- 1) Une charge  $q$  est placée au centre d'une sphère de rayon  $r$ . Soit  $\vec{E}$  le champ électrostatique créée par cette charge. Calculer le flux de  $\vec{E}$  à travers la sphère.
- 2) La charge  $q$  est maintenant placée au centre d'un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $2L$ . Calculer le flux de  $\vec{E}$  à travers le cylindre.
- 3) La charge  $q$  est maintenant placée entre deux plans  $P_1$  et  $P_2$  parallèles et indéfinis. Calculer le flux de  $\vec{E}$  à travers ces deux plans.
- 4) Quelle conclusion fondamentale peut-on tirer de cette étude ?

### EXE 11

On considère la surface fermée d'un cube d'arête  $a$  placé dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique  $\vec{E} = x^2 \vec{i}$

- 1) Calculer le flux du champ électrostatique à travers la surface total du cube.
- 2) En déduire la charge intérieure du cube.
- 3) Retrouver la charge totale dans le cube en calculant, en tout point de l'espace, la densité volumique de charges  $\rho$ .

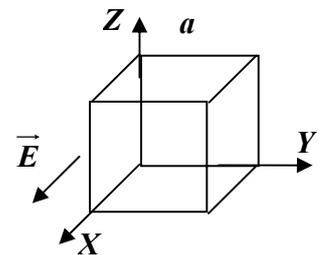


Figure 1

### EXE 12

1) Calculer le champ électrostatique créée, en tout point  $M$  de l'espace, par une distribution volumique de charges, de densité uniforme  $\rho$ , contenue entre deux sphères concentriques de rayon  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

2) Tracer la courbe  $E(r)$  avec  $r = OM$ .  $E$  est-il une fonction continue ?

3) Retrouver la valeur de  $E$  si  $R_1$  tend vers  $R_2$ .  $E$  reste-t-il une fonction continue ? Expliquer.

N.B. : Dans la solution on traite aussi les résultats de l'exercice 17.

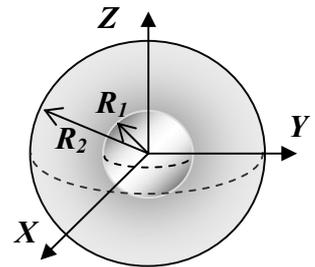


Figure 2

### EXE 13

Un cylindre infini d'axe  $OZ$  et de rayon  $R$  porte une distribution surfacique de charges de densité uniforme  $\sigma$ .

1) Calculer le champ électrostatique en tout point  $M$  de l'espace.

2) Tracer les variations du champ en fonction de la distance  $r = hM$  où  $h$  est la projection de  $M$  sur l'axe  $Z$ .

### EXE 14

Soit une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$  portant une charge répartie en volume avec une densité  $\rho$  non constante.

Calculer le champ électrostatique en un point  $M$  à la direction  $r'$  de  $O$  ( $r' > R$ ) dans les deux cas suivants :

1)  $\rho = ar$  où  $0 < r < R$

2)  $\rho = b/r$

**EXE 15**

On considère trois distributions de charges dont les vecteurs champs électrostatiques sont donnés par:

$$1) \vec{E}_1 = 2ax y \vec{i} + a(x^2 - y^2) \vec{j}$$

$$2) \vec{E}_2 = -2(a x \vec{i} + a y \vec{j} + b z \vec{k})$$

$$3) \vec{E}_3 = a y \vec{i} + a x \vec{j}$$

Déterminer dans chacun des cas la densité volumique de charges  $\rho$ .

**EXE 16**

Expliquer pourquoi on ne peut pas déterminer, en tout point de l'espace, la direction du champ créée par une distribution de charges répartie sur un segment de droite, sur un cylindre fini ou sur n'importe quelle figure géométrique contenant moins de deux plans de symétries.

**III- Calcul indirect du champ électrostatique.****EXE 17**

Reprendre l'exercice 12/3 et calculer en tout point de l'espace le potentiel électrostatique. Tracer ensuite les variations de  $V$  en fonction de  $r = OM$ . Le potentiel est-il une fonction continue ?

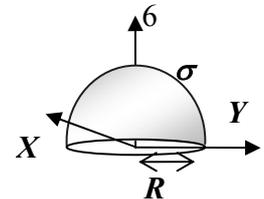
**N. B. :** Pour la solution voir exercice 12.

**EXE 18**

Une demi sphère creuse de centre  $O$  et de rayon  $R$  est chargée avec une densité surfacique  $\sigma$ . Calculer le potentiel électrostatique en  $O$  dans les deux cas suivants :

$$1) \sigma = \sigma_0 = \text{constante positive.}$$

$$2) \sigma = \sigma_0 \cos\theta, \text{ où } \theta \text{ est l'angle des coordonnées sphériques.}$$

**EXE 19**

Un disque plan circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$  porte une distribution de charges superficielle uniforme de densité  $\sigma$ .

1) Déterminer directement le potentiel électrostatique  $V(z)$ , en un point  $M$ , de l'axe de révolution du disque, repéré par sa distance  $z$  au centre  $O$  (prendre seulement les points  $M$  ayant  $z > 0$ ).

2) En déduire le champ  $E(z)$ .

**EXE 20**

Un anneau fin de rayon  $R$  porte une densité linéique de charges  $\lambda$  qui varie avec l'angle des coordonnées polaires  $\theta$  selon la loi  $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$ ; avec  $\lambda_0$  une constante positive. Calculer le potentiel et le champ au centre de l'anneau.

**EXE 21**

Un dipôle de moment  $\vec{p} = qa \vec{i}$  est constitué de deux charges ponctuelle  $-q$  et  $+q$  placées dans le vide aux points  $A$  et  $B$  de l'axe  $OX$  de part et d'autre de  $O$ . La distance  $AB = a$ . Un point  $M$

éloigné des charges est repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .

1) Calculer le potentiel  $V(\mathbf{M})$  du dipôle au point  $\mathbf{M}$ , en déduire le module et l'orientation du champ électrostatique.

2) Le dipôle est maintenant placé dans un champ extérieur uniforme  $\vec{E}_0$  orienté suivant l'axe  $OX$ . Le potentiel de ce champ est nul à l'origine  $O$ .

a- Donner l'expression du potentiel électrostatique au point  $M$ .

b- Quelles sont les surfaces équipotentielles  $V = 0$ .

c- Quelle est la valeur du champ sur l'équipotentielle  $V = 0$  en fonction de  $E_0$  et  $\theta$ .

#### IV- Conducteurs électrostatiques

Un conducteur ( $C$ ) chargé en équilibre électrostatique est caractérisé par :

- $E = 0$  dans tout le volume de ( $C$ ).
- Le volume de ( $C$ ) est équipotentiel.
- La distribution de charge est superficielle.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface de ( $C$ ).
- Un conducteur garde ses propriétés même s'il est creux.

#### EXE 22

Sur le sommet d'un conducteur sphérique de rayon  $R$ , on pose un petit disque conducteur de rayon  $r$  et de masse  $m$ .

Calculer, en fonction de  $m$ ,  $R$ ,  $r$  et  $g$ , la valeur du potentiel  $V$  de la sphère pour laquelle le disque se soulève.

#### EXE 23

Soit deux sphères conductrices  $S$  et  $S'$ , de rayon  $R$  et  $R'$ , reliées par un fil conducteur. On porte l'ensemble à un potentiel  $V$ .

1) Exprimer le rapport  $Q/Q'$  de charges portées par chacune des sphères. En déduire le rapport  $\sigma/\sigma'$ .

2) En déduire des conséquences pratiques sur un corps chargé et relié au sol et sur les pouvoirs des pointes.

**N.B.** : On suppose que le fil est assez long de façon que le potentiel de chaque sphère ne peut être du qu'à l'influence de ses propres charges.

#### EXE 24

Une sphère conductrice creuse  $S$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de rayon extérieur  $R_2 = 36 \text{ cm}$  et de centre  $O$ , est placée dans le vide de permittivité relative égale à 1.

L'origine des potentiels est prise à l'infini.

1) La sphère  $S$  porte une charge  $Q_0 = 2,8 \mu\text{C}$ .

a- Déterminer, en tout point de l'espace, le sens et la direction du champ électrique  $\vec{E}$  créée par  $Q_0$ .

b- Calculer  $E$  en fonction de la densité de charges de  $S$  et en déduire le potentiel.

c- Retrouver, en fonction de  $Q_0$ , le potentiel électrique.

d- Quelle est le potentiel  $V$  et la capacité  $C$  de la sphère  $S$ . Faire l'application numérique et donner  $V$  en  $kV$  et  $C$  en  $pF$ .

2) On approche de  $S$  une deuxième sphère, conductrice et chargée, de centre  $O'$  et de rayon  $R' = 18 \text{ cm}$ . La distance  $OO' = d = 72 \text{ cm}$  ( $d = 2R_2 = 4R'$ ).  $S$  est maintenue au potentiel  $V$  et celui de  $S'$  est  $V'$ .

a- Calculer, en fonction de  $R_2$ ,  $V$  et  $V'$ , les expressions littérales de la charge  $Q$  de  $S$  et de la charge  $Q'$  de  $S'$ .

b- En déduire l'expression des coefficients,  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  et expliquer la signification de chacun de ces coefficients.

On donne :  $Q = C_{11} V + C_{12} V'$

$$Q' = C_{21} V + C_{22} V'$$

c- Quelle est l'influence de  $S'$  sur la capacité de  $S$ .

d- A.N : Calculer, en microcoulomb,  $Q$ ,  $Q'$  et en picofarad  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  et  $C_{22}$ .

On donne  $V' = 140 \text{ kV}$ .

3) On admet, maintenant, que les deux surfaces sphériques limitant  $S$  ont même rayon  $R_1 = R_2 = 36 \text{ cm}$  et que, par suite, l'épaisseur de  $S$  est négligeable.

On place  $S'$  dans  $S$  de façon que les deux sphères aient le même centre.  $S'$  est maintenue au potentiel  $V'$  et porte la charge  $Q'$ . La face interne de  $S$  porte la charge  $Q_1$  et la face externe porte la charge  $Q_2$ .

a- Calculer, en fonction de  $R_2$ ,  $Q'$  et  $V'$ , la charge  $Q = Q_1 + Q_2$  et le potentiel  $V$  de la sphère  $S$ . Faire l'application numérique.

b- Quelle est la charge  $Q_0$  que porte  $S$  avant qu'elle ne soit influencée par  $S'$ .

### EXE 25

On considère un ensemble de charges  $+q$ ,  $+q$ ,  $-q$ ,  $-q$  placées respectivement aux sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'un carré de côté  $a$  :

Calculer l'énergie électrostatique du système.

### EXE 26

Une charge  $Q$  est uniformément répartie dans le volume d'une sphère isolante de rayon  $R$ . Calculer son énergie électrostatique en considérant le travail nécessaire pour créer cette distribution.

### EXE 27

Un conducteur sphérique  $s$  de rayon  $r$  est fixe et maintenu au potentiel constant  $v$ . Au voisinage se trouve un autre conducteur sphérique  $S$  isolé de rayon  $R$  portant une charge constante  $Q$ . Les deux centres des sphères, espacés d'une distance  $L$ , restent dans un même plan horizontal.

1) Calculer la charge  $q$  de  $s$  et le potentiel  $V$  de  $S$  en fonction de  $v$ ,  $Q$ ,  $r$ ,  $R$  et  $L$ .

2) Calculer la force électrostatique  $F_e$  qui existe entre ces deux conducteurs.

3)  $F_e$  fait déplacer  $S$  depuis la distance  $L = L_0$  jusqu'à l'infini. Calculer le travail  $W_e$  fourni par  $F_e$ .

4) Calculer l'énergie électrostatique  $W_i$  du système formé par les deux conducteurs quand  $L = L_0$ . En déduire l'énergie du système  $W_f$  quand  $L$  tend vers l'infini.

5) Quel est alors le gain en énergie  $\Delta W$  du système au cours du déplacement.

6) Comparer  $\Delta W$  et  $W_e$  et vérifier alors la conservation de l'énergie.

**EXE 28**

Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique de rayon intérieur  $R_1$ , extérieur  $R_2$  et de hauteur  $h$ .

Que devient la capacité quand l'épaisseur du condensateur est négligeable devant ses rayons.

**EXE 29**

Soit un condensateur plan dont les armatures, séparées par de l'air, ont une surface  $S$  et sont écartées à une distance  $e$ .

On introduit parallèlement à ces armatures une plaque métallique d'épaisseur  $d$ . Que devient la capacité du conducteur considéré.

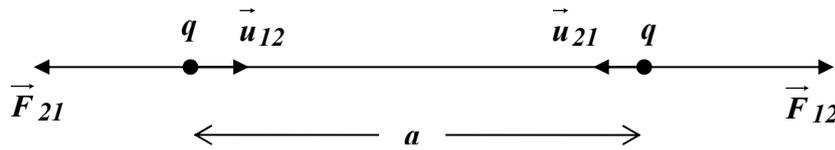
**EXE 30**

On charge un condensateur  $C$  sous une différence de potentiel  $V_0$ .  $C$  étant isolé on le relie à un autre condensateur  $C'$  initialement neutre. Calculer les charges portées par chaque condensateur ainsi que leurs d.d.p.

### Electrostatique

#### I- Calcul direct de champs électrostatiques

##### EXE 1



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \vec{u}_{12} \quad \text{Et} \quad \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \vec{u}_{21}$$

Noter l'emplacement de l'origine des vecteurs unitaires et l'ordre des indices.

Loi de Coulomb :  $F = F_{12} = F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2}$

On rapproche les charges à une distance b pour que la nouvelle force  $F_N$  devienne égale au

double de  $F$ .  $2F = F_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{b^2}$

Soit :  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{b^2} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

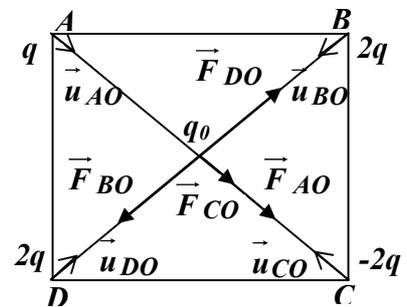
##### EXE 2

La résultante des forces exercées sur  $q_0$  est :

$$\vec{F} = \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{BO} + \vec{F}_{CO} + \vec{F}_{DO} = \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{CO}$$

Soit :

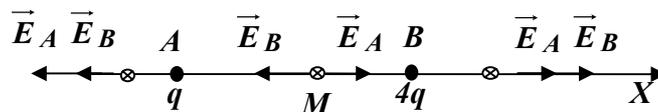
$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{2a^2} \vec{u}_{AO} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2qq_0}{2a^2} \vec{u}_{CO} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{2a^2} \vec{u}_{AO} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qq_0}{2a^2} \vec{u}_{AO} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qq_0}{2a^2} \vec{u}_{AO} \end{aligned}$$



La résultante a le sens et la direction de  $\vec{u}_{AB}$  et son module est donnée par l'expression :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qq_0}{2a^2}$$

##### EXE 3



On distingue trois zones :

- A gauche de  $A$  où les deux champs ne peuvent que s'ajouter
- A droite de  $A$  où les champs ne peuvent que s'ajouter
- Entre  $AB$  où les deux champs sont opposés et donc peuvent s'annuler mutuellement si leurs modules sont égaux. Dans ce cas, la résultante des champs sera nulle si :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{(a-x)^2} \text{ Avec } x = AM$$

$$\text{Soit : } (a-x)^2 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = 4a^2 \Rightarrow x = \frac{-a \pm 2a}{3} = \begin{cases} a/3 \\ -a \end{cases}$$

La solution  $x = -a$  n'est pas réelle, car on sort de la zone entre  $A$  et  $B$ , il reste la solution  $x = a/3$ .

**EXE 4**

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + y^2} \vec{u}_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + y^2} \vec{u}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + y^2} (\vec{u}_A + \vec{u}_B)$$

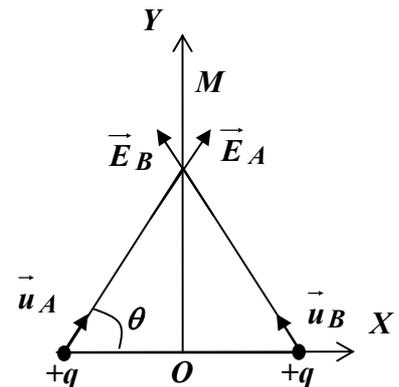
La somme vectorielle des vecteurs unitaires est un vecteur appartenant à l'axe  $OY$ , donc le champ total est porté par  $OY$ .

Projection sur  $OY$  :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + y^2} 2 \sin \theta \text{ . Soit : } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\text{Et donc } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

$$E' = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(a^2 + y^2)^{-1/2} (a^2 - 2y^2)}{(a^2 + y^2)^3}$$

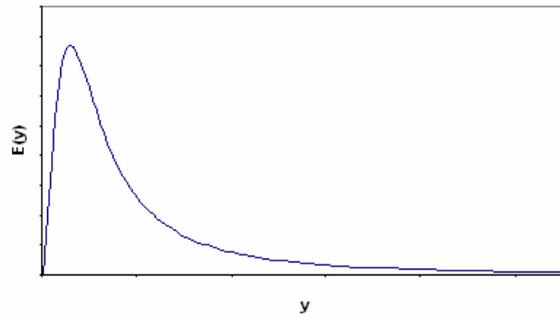


La dérivée de  $E$  a le signe de  $(a^2 - 2y^2)$ , le reste de l'expression est toujours positif. Donc  $E' \geq 0$

si  $y$  est comprise entre  $-\frac{a}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$  et il est négatif à l'extérieur de ces racines. Comme le

problème est limité aux  $y \geq 0$  nous avons :

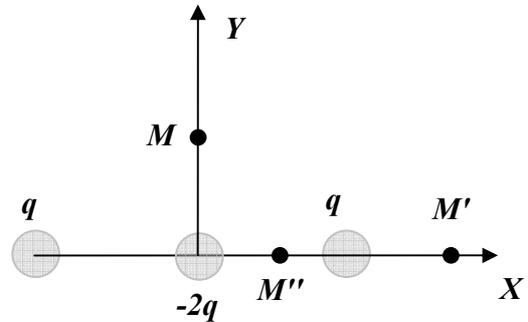
$y$	$0$	$a/\sqrt{2}$	$+\infty$
$E'(y)$	+	-	-
$E(y)$	$0$	$E = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2}$	$0$



Le champ passe par un extremum correspondant à l'abscisse  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ . Il s'annule à l'infini et au centre  $O$ . Il reste constamment continu. Bien entendu au point  $M$  il n'y a pas de charge donc il n'y a pas de force électrique.

### EXE 5

En  $M$  (sur  $OY$ ), le champ  $\vec{E}$  est la résultante des champs créés par les trois charges. Le champ créé par les deux charges  $q$  est porté par  $OY$  et il a pour expression  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 2 \sin \theta \vec{j}$  (voir exercice 4). A ce champ s'ajoute celui créé par la charge  $-2q$  et ayant comme expression  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2q}{y^2} \vec{j}$ .



La résultante est :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 2 \sin \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{y^2} \right) \vec{j} \\ &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{y^2} \right) \vec{j} \\ &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y^3 - (a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{y^2 (a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{j} \end{aligned}$$

En  $M'$  ( $x > a$ ), la résultante est :  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_q + \vec{E}_{-2q}$ . Soit :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x+a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{x^2} \right) \vec{i} \\ &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{a^2(3x^2 - a^2)}{x^2(x^2 - a^2)^2} \right) \vec{i} \end{aligned}$$

En  $M''$  ( $0 < x < a$ ), la résultante est :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_q + \vec{E}_q + \vec{E}_{-2q} \\ &= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x+a)^2} + \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2q}{x^2} \right) \vec{i} \\ &= -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2ax^3 + (a^2 - x^2)^2}{x^2(x^2 - a^2)^2} \right) \vec{i}\end{aligned}$$

Soit 
$$\vec{E} = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2ax^3 + (a^2 - x^2)^2}{x^2(x^2 - a^2)^2} \right) \vec{i}$$

### EXE 6

1-  $dl_1$  crée au point M le champ élémentaire  $\vec{dE}_1$  faisant  $\theta$  avec la verticale,  $dl_2$  symétrique à  $dl_1$  par rapport à  $OY$  crée au point M le champ  $\vec{dE}_2$  symétrique aussi à  $\vec{dE}_1$ . Le champ résultant  $\vec{dE}$  est donc porté par  $OY$ . En considérant, de cette façon, deux à deux tous les éléments symétriques, nous obtenons un champ  $\vec{E}$  total porté par  $OY$ .

2- Le champ élémentaire résultant est : 
$$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$

Où  $dl = dl_1 = dl_2$

Projection sur  $OY$  : 
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} 2 \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} 2 \cos \theta$$

Avec  $\cos \theta = \frac{y}{r}$ ,  $\operatorname{tg} \theta = \frac{l}{y}$  et donc  $\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{dl}{y}$ , nous

aurons :

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y d\theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta y^2} 2 \cos \theta$$

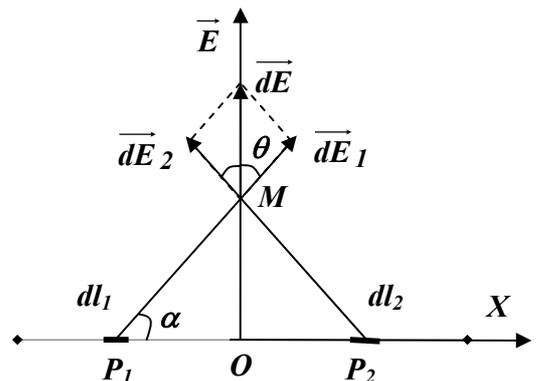
Soit après simplification 
$$dE = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \cos \theta d\theta.$$

Le champ total sera après intégration :

$$E = \int_0^{\theta_1} \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \cos \theta d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \sin \theta_1. \text{ Avec}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

L'intégrale porte sur la moitié de la longueur chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.



D'où 
$$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{y\sqrt{y^2 + a^2}}$$

3- Si  $a$  devient infinie, alors  $E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y}$ . C'est le champ, au point  $M$ , créé par un fil infini portant une distribution linéique de charge.

### EXE 7

La charge  $dq'$  crée :  $\vec{dE}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r^2} \vec{u}'$ , la charge  $dq''$

symétrique à  $dq'$  par rapport à  $OZ$  crée

$$\vec{dE}'' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq''}{r^2} \vec{u}'' \text{ symétrique à } \vec{dE}'.$$

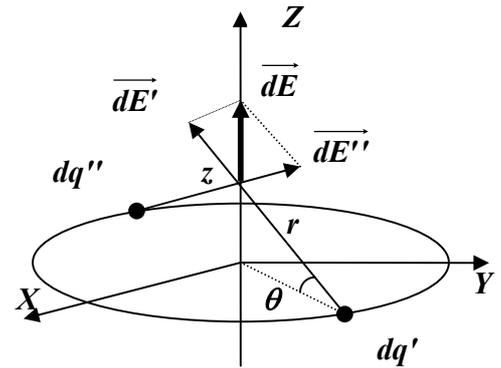
$dq' = dq''$  donc  $dE' = dE''$ .

Le champ résultant selon l'exercice 4 est :

$$\vec{dE} = \vec{dE}' + \vec{dE}'' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r^2} (\vec{u}' + \vec{u}'') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r^2} 2 \sin \theta \vec{k}$$

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} 2 \sin \theta = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{z dl}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int dl = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R \end{aligned}$$

Donc 
$$E(z) = \frac{\lambda R}{\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$



### EXE 8

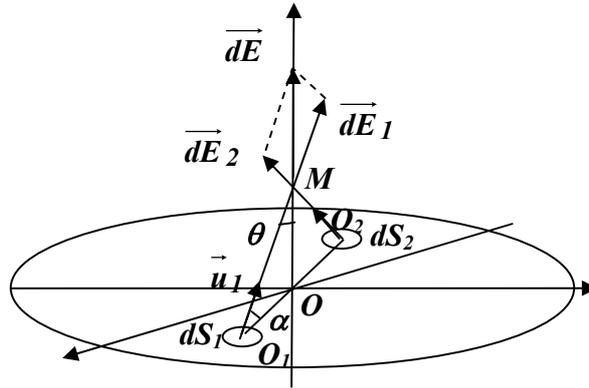
1-  $dS_1$  contient  $dq_1$  et crée au point  $M$  le champ élémentaire  $\vec{dE}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{O_1M^2} \vec{u}_1$  faisant

l'angle  $\theta$  avec  $OZ$ .

$dS_2$  symétrique à  $dS_1$  contient  $dq_2 = dq_1$  et crée au point  $M$  le champ élémentaire

$$\vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_2}{O_2M^2} \vec{u}_2 \text{ faisant le même angle } \theta \text{ avec } OZ.$$

Si l'on note  $dq = dq_1 = dq_2$  et sachant que  $O_1M = O_2M$ , alors le champ résultant sera forcément porté par  $OZ$  :



$$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{O_1M^2} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$

Où  $\rho = O_1O = O_2O$ .

Projection sur  $OZ$  :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{O_1M^2} 2 \sin \alpha$$

$$\text{Où } dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{O_1M^2} 2 \cos \theta.$$

Avec  $dq = \sigma dS$ ,  $\cos \theta = \frac{z}{O_1M}$ ,  $\text{tg } \theta = \frac{\rho}{z}$  et donc  $\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{d\rho}{z}$ , nous aurons :

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{z^2} \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 \theta}. \text{ En coordonnées cylindrique } dS = \rho d\rho d\varphi. \text{ Le champ total sera :}$$

$$dE = \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho d\varphi}{z^2} \cos^3 \theta = \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \text{tg } \theta}{z^2} \frac{z d\theta}{\cos^2 \theta} d\varphi \cos^3 \theta = \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta d\varphi$$

Si l'on intègre :

$$E = \int_0^{\theta_0} \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} (1 - \cos \theta_0) \pi. \text{ Avec } \cos \theta_0 = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

L'intégrale porte sur la moitié de la surface chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.

$$\text{D'où } E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

2-  $Z \Rightarrow +\infty$ ,  $E(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  est le champ créé par un plan chargé en surface.

**EXE 9**

Le système peut être considéré comme la superposition d'un plan est d'un disque. Le champ sera porté par la droite  $OM$  et on peut le calculer en considérant qu'il est la superposition du champ créée par un plan chargé en surface auquel on retranche le champ créée par un disque chargé en surface aussi. D'après l'exercice 8, nous aurons :

$$\text{si } z > 0 \quad E_{\text{disque}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

$$\text{et} \quad E_{\text{plan}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

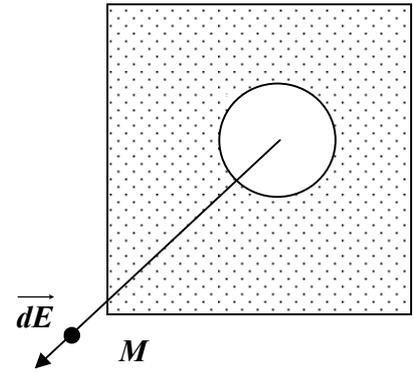
$$\text{si } z < 0 \quad E_{\text{disque}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

$$\text{et} \quad E_{\text{plan}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Donc le champ créée par notre système est :

$$\text{si } z > 0 \quad E = E_{\text{plan}} - E_{\text{disque}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\text{si } z < 0 \quad E = E_{\text{plan}} - E_{\text{disque}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -2 + \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

**II- Théorème de GAUSS****EXE 10**

$1/\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \vec{u}$  est le champ électrostatique créée par  $q$  en tout point  $M$  de la surface de la

sphère. Par définition le flux de  $\vec{E}$  à travers la sphère est  $\Phi(\vec{E} / S) = \iint_S \vec{E} d\vec{S}$ . Or  $\vec{E}$  et  $d\vec{S}$  sont

parallèles. Le flux devient :  $\Phi(\vec{E} / S) = \iint_S E dS$ . Comme  $E$  ne dépend que de  $R$  et que tous les

points de  $S$  sont à la même distance  $R$  de  $O$ , le module du champ est uniforme :

$$\Phi(\vec{E} / S) = E \iint_S dS = ES = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

2- Le cylindre est composé d'une surface latérale  $S_L$  et de deux surfaces de bases  $S_{B1}$  et  $S_{B2}$ .

Le flux de  $\vec{E}$  à travers le cylindre est

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{E}/S) &= \iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_S \vec{E} d\vec{S} + \iint_S \vec{E} d\vec{S} + \iint_S \vec{E} d\vec{S} \\ &= \iint_{S_L} E_L dS_L \cos \theta_L + \iint_{S_{B1}} E_{B1} dS_{B1} \cos \theta_1 + \iint_{S_{B2}} E_{B2} dS_{B2} \cos \theta_2\end{aligned}$$

$$\text{Avec } E_L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_L^2}, E_{B1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \text{ et } E_{B2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2}.$$

Si  $\Omega_L$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont les angles solides sous lesquels on observe du point  $O$  respectivement les surfaces  $S_L$ ,  $S_{B1}$  et  $S_{B2}$  alors l'expression du flux devient :

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{E}/S) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \iint_{S_L} \frac{dS_L \cos \theta_L}{r_L^2} + \iint_{S_{B1}} \frac{dS_{B1} \cos \theta_1}{r_1^2} + \iint_{S_{B2}} \frac{dS_{B2} \cos \theta_2}{r_2^2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\Omega_L + \Omega_{B1} + \Omega_{B2}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\end{aligned}$$

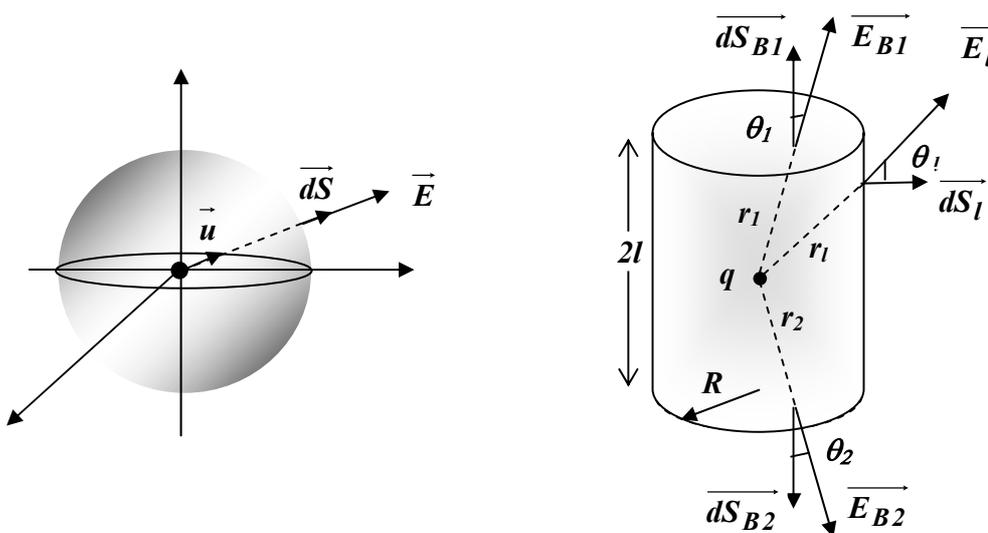
Où  $\Omega = 4\pi$  est l'angle solide sous lequel on observe tout l'espace.

$$\text{On retrouve } \Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

De même pour deux plans on retrouve le même rapport  $q/\epsilon_0$  car l'angle solide sous lequel on voit un plan est  $2\pi Srd$  et donc l'angle solide sous lequel on voit deux plans est  $4\pi Srd$  (espace).

*Remarque :* - les surfaces étudiées sont toutes fermées. Deux plans parallèles et espacés sont considérés comme une surface fermée.

Conclusion : Le flux du champ électrique créée par une charge à travers une surface fermée contenant la charge est toujours égal au rapport  $q/\epsilon_0$  : C'est le théorème de Gauss.



**EXE 11**

1-  $\vec{E} = x^2 \vec{i}$  possède une seule composante. Le champ sera donc perpendiculaire à tous les vecteurs de surface (flux nul) sauf ceux des faces parallèles au plan OZ. Le flux total est alors :

$$\Phi(\vec{E} / S) = \iint_{S1} x^2 \vec{i} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S2} x^2 \vec{i} \cdot d\vec{S}_2$$

Or sur le plan appartenant à OYZ ( $S_1$ ),  $x = 0$  et sur le

plan parallèle à celui-ci ( $S_2$ )  $x = a$  d'où :

$$\Phi(\vec{E} / S) = \iint_{S2} a^2 dS_2 + 0 = a^2 a^2 = a^4$$

2- La surface étant fermée,  $\Phi(\vec{E} / S) = a^4 = \frac{q}{\epsilon_0}$  soit  $q = a^4 \epsilon_0$

3- On utilise l'équation de Poisson :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Ce qui nous emmène à :  $\frac{dx^2}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  soit  $\rho = 2\epsilon_0 x$ . La densité n'est pas uniforme mais varie

linéairement avec  $x$ . C'est-à-dire que l'on a des plans "équicharges" tous parallèles à OYZ. Sur le plan OYZ ( $x = 0$ ) il y a absence de charges. Plus on s'éloigne plus la quantité de charges augmente. La charge contenue dans le cube est la somme de toutes ces charges. Soit dans le cube un volume élémentaire  $dV$  contenant la charge  $dq$ . On peut écrire :  $dq = \rho dV$ . La charge du

$$\text{cube serait : } q = \int_{\text{volume du cube}} \rho dV = \iiint_{\text{volume du cube}} 2\epsilon_0 x dx dy dz = 2\epsilon_0 \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a dz$$

Et on retrouve  $q = a^4 \epsilon_0$

**EXE 12**

1- En un point  $M$  de l'espace le champ est radial et il est constant sur tous les points ayant la même distance  $r$  de  $O$ .  $\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$   $S$  étant la surface de Gauss et  $v$  le volume chargé inclus dans  $S$ .

$$\blacktriangleright \text{ Si } r > R_2, E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \text{ soit } E = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Leftrightarrow V = -\int E dr = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}, \text{ la constante d'intégration est nulle car } V(\infty) = 0$$

$$\blacktriangleright \text{ Si } R_2 > r > R_1, E 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3) \text{ soit } E = \frac{\rho (r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Leftrightarrow V = -\int E dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + C_1$$

► Si  $r < R_1$ , absence de charge dans la surface fermée,  $E = 0$ .  $V = C_2$ .

### Détermination de $C_1$ et $C_2$

Quand  $M$  est à la distance  $R_1$  de  $O$  :  $\lim_{r \rightarrow R_1^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R_1^-} V(r)$ . Soit  $C_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} \right) + C_1$

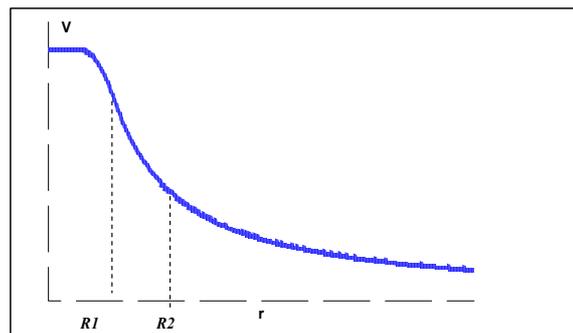
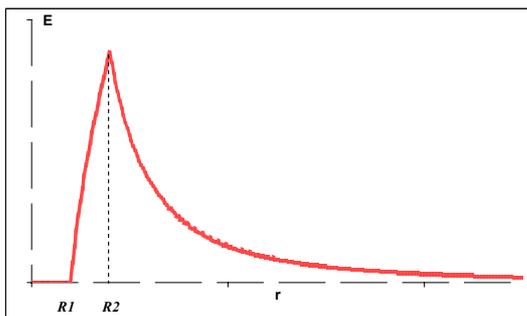
A la distance  $R_2$  de  $O$  :  $\lim_{r \rightarrow R_2^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow R_2^-} V(r)$ . Soit  $-\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} \right) + C_1 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} R_2^2 \text{ et donc } C_2 = \frac{3}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

On regroupe les résultats dans le tableau :

$r > R_2$	$E = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$
$R_2 > r > R_1$	$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - R_1^3)}{r^2}$	$V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{3R_2^2}{2} - \frac{r^3 + 2R_1^3}{2r} \right)$
$r < R_1$	$E = 0$	$V = \frac{3}{2} \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$

2-



Le champ et le potentiel sont des fonctions continues à la traversée d'un volume chargé.

**N.B :** Le champ n'est discontinu qu'au passage à travers une surface mince chargée.

3- Si  $R_1$  tend vers  $R_2$ , on obtient une seule sphère chargée en surface de distribution :  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Deux cas uniquement sont possibles  $r < R$  et  $r > R$ . On peut appliquer le théorème de Gauss ou directement remplacer  $\rho$  par son expression en fonction de la charge.

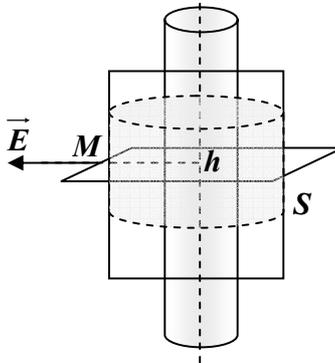
$r > R$	$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$
$r < R$	$E = 0$	$V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$

**EXE 13**

Le cylindre infini contient deux plans de symétrie passant par  $hM$ . Le champ électrique s'il existe est donc porté par  $hM$ .

Le champ ne dépend que de la distance entre  $M$  et les charges.

L'ensemble des points  $M$  tel que la distance  $hM$  reste constante est un cylindre d'axe  $ZZ'$  et de rayon  $r = hM$ . La surface de Gauss  $S$  sera alors ce cylindre qu'il faut fermer par deux surfaces de base. La hauteur de  $S$  est finie que l'on prend égale à  $L$ .



$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \sigma d\Sigma$$

$\Sigma$  étant la surface chargée, du cylindre infini, contenue dans la surface de Gauss.

$$E 2\pi r L = \frac{\sigma}{\epsilon_0} 2\pi r L \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

**N. B :** Le flux du champ à travers les deux surfaces de base est nul car le champ est perpendiculaire à l'élément de surface.

**EXE 14**

Théorème de Gauss :  $\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$  où  $S$  est la sphère de Gauss de centre  $O$  et de rayon  $r'$ .  $v$  est le volume chargé contenu dans  $S$ .

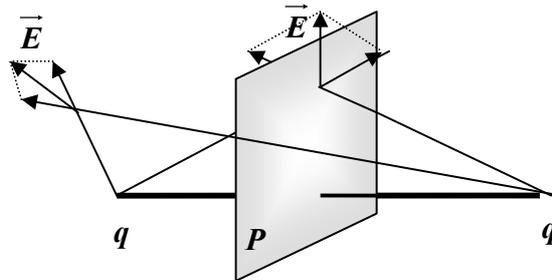
$$1- E 4\pi r'^2 = \frac{a}{\epsilon_0} \iiint_V r r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{a}{\epsilon_0} \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$E = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^4}{4} 2 \cdot 2\pi \frac{1}{r'^2} = \frac{aR^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{r'^2}$$

$$2- E 4\pi r'^2 = \frac{b}{\epsilon_0} \iiint_V \frac{1}{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{b}{\epsilon_0} \int_0^R r dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$E = \frac{b}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi \frac{1}{r'^2} = \frac{bR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r'^2}$$

## EXE 15



On utilise l'équation de Poisson :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

1-  $\text{div} \vec{E}_1 = 2ay - 2ay \Rightarrow \rho = 0$  . Absence de charges à l'endroit où règne le champ.

2-  $\text{div} \vec{E}_2 = -2a - 2a - 2b = -4a - 2b \Rightarrow \rho = -2\epsilon_0(4a + b)$  .  $\rho$  est uniforme.

3-  $\text{div} \vec{E}_3 = 0 \Rightarrow \rho = 0$  . Absence de charges à l'endroit où règne le champ.

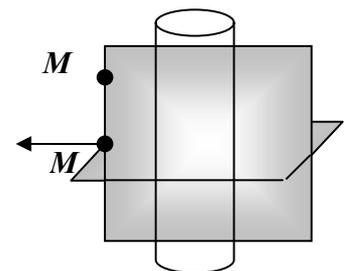
## EXE 16

- Cas d'un segment :

Si  $M \in$  au plan de symétrie  $P$ ,  $\vec{E}$  est porté par ce plan. Si  $M \notin$  au plan de symétrie, la direction de  $\vec{E}$  change selon la position de  $M$ .

- De même pour un cylindre fini.

Si  $M \in$  au plan de symétrie,  $\vec{E}$  est porté par ce plan. Mais sa direction exacte ne peut pas être déterminée. Si  $M \notin$  au plan de symétrie, la direction de  $\vec{E}$  change selon la position de  $M$ . Par contre quand  $M$  appartient à deux plans de symétrie, le champ est porté par la droite intersection.

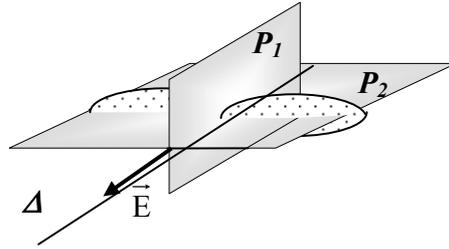


- Cas d'une distribution quelconque présentant deux plans de symétrie.

Si  $M \in P_1$ ,  $\vec{E}$  est dans  $P_1$ .

Si  $M \in P_2$ ,  $\vec{E}$  est dans  $P_2$ .

Si  $M \in \Delta = P_1 \cap P_2$ ,  $\vec{E}$  est porté par  $\Delta \Rightarrow \Delta$  est une ligne de force.



### III- Calcul indirect du champ électrostatique

#### EXE 18

Une charge ponctuelle  $dq$  contenue dans  $dS$  crée au point  $O$  un potentiel élémentaire :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{R}$$

Le potentiel créé par l'ensemble des charges de  $S$  est alors

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{R}$$

1-  $\sigma = \sigma_0$  :

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 R} S = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}$$

2-  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  :

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\cos \theta dS}{R}. \text{ En coordonnées sphériques } dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_S R \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\sigma_0 R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Or  $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$ , d'où :

$$V = \frac{\sigma_0 R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma_0 R}{4\epsilon_0}$$

#### EXE 19

1- le potentiel au point M est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r}$$

$dS$  étant la surface élémentaire contenant  $dq$ . On peut l'exprimer en coordonnées cylindriques :

$$dS = \rho d\rho d\varphi.$$

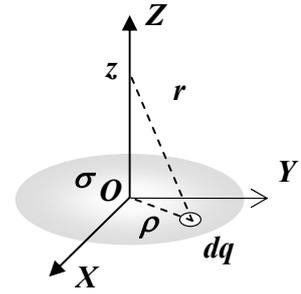
$$\text{d'où : } V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho d\rho d\varphi}{r}$$

Sous l'intégrale il ya trois variables qu'il faut convertir en deux variables seulement car nous avons une intégrale double. On prend alors la relation  $r^2 = \rho^2 + z^2$ .

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\partial\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\partial\rho} 2\pi d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right) 2\pi$$

Soit :  $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right)$  avec  $z > 0$ .



2-  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$  donne  $E = -\frac{dV}{dz}$  car point  $M$  le vecteur champ  $\vec{E}$  est porté par  $OZ$ .

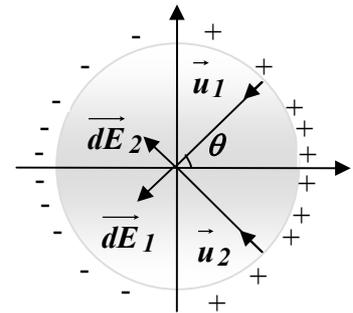
Tout calcul fait, nous aurons donc :

d'où  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k}$  sachant que  $z > 0$

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{k}$  avec  $z > 0$

**EXE 20**

Remarquons d'abord que les charges sont concentrées autour de  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et qu'il y a absence de charge à  $\theta = \pm \pi/2$ . On peut chercher le champ et le potentiel en un point quelconque de l'axe  $OZ$  et les appliquer au centre. En plus le cosinus est positif quand  $0 < \theta < \pi/2$  et il est négatif quand  $\pi/2 < \theta < \pi$



$$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \left( -\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j} - \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \right)$$

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \left( -2 \cos\theta \vec{i} \right) = \frac{-2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \cos\theta \vec{i}$$

=>  $\vec{E}$  est porté par  $OX$  et il est opposé à  $\vec{i}$

$dl = R d\theta$ , la seule variable dans cette expression est  $\theta$ .

$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ \frac{2\theta + \sin 2\theta}{4} \right]_0^\pi \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{\pi}{2} \vec{i} \quad \text{Soit} \quad \vec{E} = \frac{-\lambda_0}{4\epsilon_0} \frac{1}{R} \vec{i}$$

En  $M$  le potentiel crée par une charge élémentaire  $dq = \lambda dl$  est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 \cos\theta R d\theta}{R^2} \quad \text{soit} \quad V = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

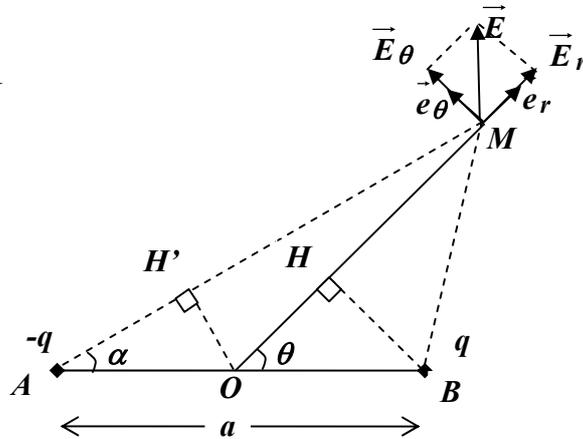
En  $O$ , le potentiel des charges plus compense celui des charges négatives de sorte que le potentiel total soit nul.

**N.B :** On ne peut pas utiliser ici la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$

### EXE 21

1-

$$\begin{aligned} r &= OM = OH + HM \\ r_1 &= AM = AH' + H'M \\ r_2 &= BM \\ r &\gg a \Rightarrow \theta \approx \alpha \end{aligned}$$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = AH' + H'M \approx \frac{a}{2} \cos\alpha + r \quad \text{et} \quad r = OH + HM \approx \frac{a}{2} \cos\theta + r_2$$

$$\text{On en déduit : } r_1 - r_2 \approx a \cos\theta \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = r^2 - \frac{a^2}{4} \cos^2\theta \approx r^2$$

$$\text{Soit : } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos\theta}{r^2}$$

$$2- \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sin\theta}{r^3}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sqrt{4a^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^3} \sqrt{3 \cos^2\theta + 1}$$

$$\text{L'orientation du champ peut être définie par l'angle } \varphi \text{ que fait } E \text{ avec } OM : \text{tg}\varphi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \text{tg}\theta$$

2- a- Le nouveau potentiel est la somme du potentiel du dipôle et du potentiel extérieur issu de  $E_0$ .

$$V'(M) = V(M) + V_0.$$

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{i} \text{ et la relation } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \text{ donnent : } V_0 = -\int E_0 dx = -E_0 x + Cte$$

A l'origine  $V_0(O) = 0 \Rightarrow Cte = 0$ , d'où  $V_0 = -E_0 x$ . avec  $x = r \cos \theta$ .

$$V_{Total}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta$$

$$\text{b- } V_{Total} = 0 \Rightarrow \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^2} - E_0 r \right) \cos \theta = 0$$

$\Rightarrow \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^2} - E_0 r \right) = 0$  et dans ce cas  $r = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{E_0}}$ , ce qui définit une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$  comme surface équipotentielle.

Ou  $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$ , ce qui définit le plan médiateur  $OY$  comme surface équipotentielle.

c- Le champ est la résultante entre le champ du dipôle et le champ extérieur  $E_0$ .

$\vec{E}_{Total} = \vec{E} + \vec{E}_0$ . En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = E_r (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + E_\theta (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

En ajoutant  $\vec{E}_0$  et en réarrangeant l'équation, on trouve :

$$\vec{E}_{Total} = (E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta + E_0) \vec{i} + (E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta) \vec{j}$$

On doit déterminer le champ en fonction de  $\theta$ , c'est-à-dire que l'on doit prendre l'équipotentielle

sphérique. On remplace alors  $r$  par son expression  $\sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{E_0}}$  dans  $E_r$  et  $E_\theta$ .

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^3} = 2E_0 \cos \theta \text{ et } E_\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sin \theta}{r^3} = E_0 \sin \theta$$

Tout calcul fait, on trouve :

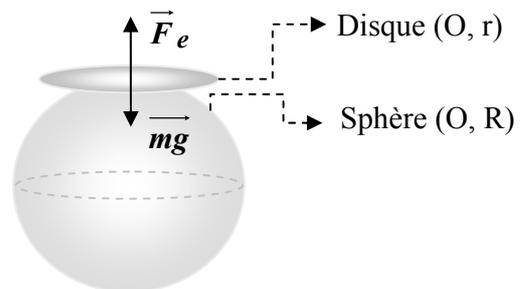
$$\vec{E}_{Total} = 3E_0 (\cos^2 \theta \vec{i} + \cos \theta \sin \theta \vec{j})$$

#### IV- Conducteurs électrostatiques

##### EXE 22

La pression électrostatique sur la surface du conducteur sphérique est  $P = \sigma^2/2\epsilon_0$ . Au contact, le disque et la sphère constitue un conducteur unique. Le disque est soumis alors à la même pression  $P$ .

D'autre part avant que le disque ne se soulève, il était à l'équilibre :  $\vec{F}_e + \vec{mg} = \vec{0}$  (on néglige les forces de réaction).



$$\text{Soit } F_e = mg \Rightarrow P S_{\text{disque}} = mg \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \pi r^2 = mg$$

Le potentiel de l'ensemble est celui de la sphère conductrice :  $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ .

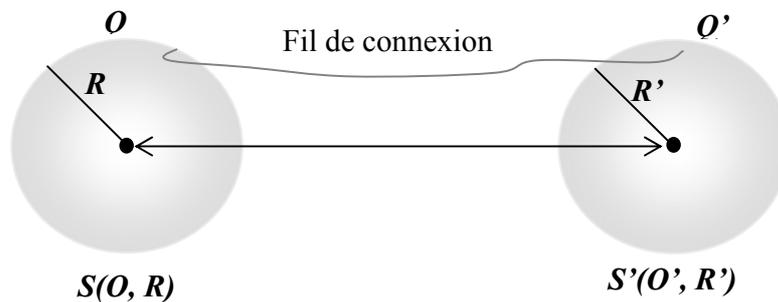
On remplace la charge par son expression en fonction de la densité :  $V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$ .

La densité de charge du disque est la même que celle de la sphère :  $\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{R}$

$$\text{Soit donc : } \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \pi r^2 = mg \Rightarrow \frac{\left(\frac{\varepsilon_0 V}{R}\right)^2}{2\varepsilon_0} \pi r^2 = mg \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 V^2}{2R^2} \pi r^2 = mg$$

Soit  $V = \frac{R}{r} \sqrt{\frac{2mg}{\pi\varepsilon_0}}$ . Quand le potentiel du de l'ensemble disque plus sphère devient supérieur à cette valeur limite le disque se soulèvera.

### EXE 23



1- Le potentiel de chaque conducteur n'est du qu'à l'influence de ses propres charges, d'où :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \text{ et } V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q'}{R'}$$

Or  $V = V'$  car les deux conducteurs sont reliés par un fil. Nous avons donc :  $\frac{Q}{R} = \frac{Q'}{R'}$

$$\text{On en déduit : } \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{R'}{R}$$

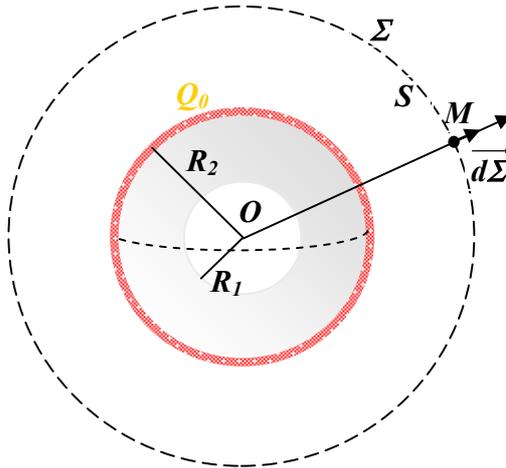
2- L'égalité en fonction des charges montre que si  $R' \gg R$  alors  $Q' \gg Q$ . Ce cas on le rencontre qu'on relie un conducteur à la terre. Son rayon est tellement petit devant celui de la terre que les charges qu'il peut contenir seront très faibles. Tout conducteur relié au sol verra ses charges disparaître.

- L'égalité en fonction des densités montre que si  $R' \gg R$  alors  $\sigma \gg \sigma'$ . Les charges se regroupent préférentiellement sur les surfaces à faible rayon de courbure. C'est l'effet des pointes. Ce phénomène est utilisé pour éliminer les charges des conducteurs que l'on ne peut pas reliés au sol tels que les avions par exemple. Les ailes contiennent des pointes ayant un petit rayon des

courbures. Les charges s'accablent à ces endroits et attirent un grand nombre d'ions (provenant de l'air) de signes opposés et se trouvent ainsi neutralisées.

### EXE 24

1- La charge initiale sur  $S$  est  $Q_0$ .  $S$  est conducteur, la charge est donc répartie sur sa surface externe. Il s'agit d'une distribution superficielle.



a- Le système est à symétrie sphérique, le champ en tout point de l'espace est radial.

b- Le champ ne dépend que de  $r = OM$ . L'ensemble des points  $M$  tel que  $OM$  reste constante est une sphère  $\Sigma$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Appliquons le théorème de Gauss sur  $\Sigma$ :  $\vec{E}$

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_S \sigma dS \quad \vec{E} // d\Sigma$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} E d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_S \sigma dS \quad E \text{ et } \sigma \text{ sont uniformes}$$

$S$  est la surface chargée contenue dans  $\Sigma$ .

$$\blacktriangleright \text{Si } r > R_2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} 4\pi R_2^2$$

$$\Rightarrow E_{r > R_2} = \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Rightarrow V = \int E dr = -\frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r}. \text{ La constante d'intégration est nulle}$$

puisque le potentiel à l'infini est nul.

$$\blacktriangleright \text{Si } R_1 < r < R_2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = 0$$

$$\Rightarrow E_{R_1 < r < R_2} = 0$$

$$\Rightarrow V = C. \text{ Continuité du potentiel } \Rightarrow V = \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

► Si  $r < R_1 \Rightarrow E 4\pi r^2 = 0$

$\Rightarrow E_{r < R_1} = 0$

$\Rightarrow$  A cause de la continuité du potentiel,  $V$  reste égale à  $\frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$ . Tout le système est équipotentiel.

Même dans le creux le potentiel reste constant et égale à  $\frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$

En fonction de  $Q_0$  et puisque  $\sigma = \frac{Q_0}{4\pi R_2^2}$ ,  $V$  devient :

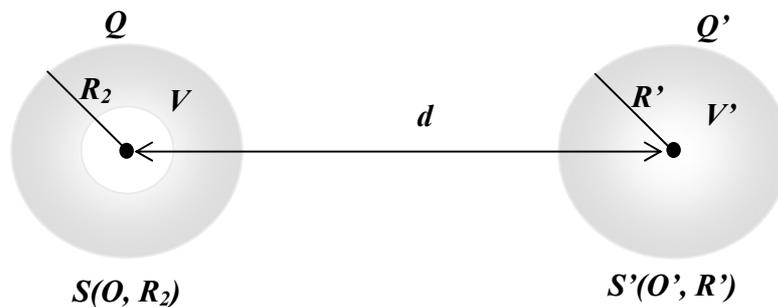
$$V_{r > R_2} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad V_{r < R_2} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

c-  $S$  est un conducteur, sa charge est  $Q_0$  et son potentiel  $V$  est constant et il est égale à  $V_{r < R_2}$ .

Puisque  $Q_0 = C V$ , on en déduit :  $C = 4\pi\epsilon_0 R_2$

A. N :  $V = 70 \text{ kV}$ ,  $C = 40 \text{ PF}$ .

2-



a- Calculons les potentiels de chaque conducteur :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{d}$$

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{R'}$$

On déduit de ce système les expressions de  $Q$  et  $Q'$  :

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{d R_2}{d^2 - R' R_2} (V d - V' R')$$

$$Q' = 4\pi\epsilon_0 \frac{d R'}{d^2 - R' R_2} (V' d - V R_2)$$

On remplace  $R'$  par  $R_2/2$  et  $d$  par  $2R_2$  :

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{2R_2}{7} (4V - V')$$

$$Q' = 4\pi\epsilon_0 \frac{2R_2}{7} (2V' - V)$$

b- Les équations d'influence s'écrivent sous la forme :

$$Q = C_{11}V + C_{12}V'$$

$$Q' = C_{21}V + C_{22}V'$$

En comparant ce système avec le système précédent on en déduit :

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 \frac{8R_2}{7}, C_{12} = C_{21} = -4\pi\epsilon_0 \frac{2R_2}{7} \text{ et } C_{22} = 4\pi\epsilon_0 \frac{4R_2}{7}$$

$C_{11}$  est la capacité de  $S$  en présence de  $S'$ ,  $C_{22}$  est la capacité de  $S'$  en présence de  $S$ .

$C_{12}$  et  $C_{21}$  sont les coefficients d'influence mutuelle entre  $S$  et  $S'$ .

c- Quand le conducteur  $S$  est seul, la capacité trouvée est  $C = 4\pi\epsilon_0 R_2$  (§ 1b). Après l'approche de  $S'$ , la capacité est devenue  $C_{11} = 4\pi\epsilon_0 \frac{8R_2}{7} > C = 4\pi\epsilon_0 R_2$ .

On conclut que la capacité d'un conducteur influencé augmente.

d- A.N. :  $Q = 1,6 \mu\text{C}$ ,  $Q' = 2,4 \mu\text{C}$

$$C_{11} = \frac{320}{7} = 45,71 \text{ PF}, C_{12} = C_{21} = -\frac{80}{7} = -11,43 \text{ PF} \text{ et } C_{22} = \frac{160}{7} = 22,86 \text{ PF}$$

Remarque

On a maintenu après influence la valeur du potentiel  $V$  de  $S$ , la charge de  $S$  qui était  $Q_0 = 2,8 \mu\text{C}$  est devenue  $Q = 1,6 \mu\text{C}$ .

3- Nous avons maintenant un système à influence totale ;  $S$  entoure complètement  $S'$ . Les charges vont apparaître aussi sur la face interne de  $S$

$$\text{a- } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{R_2} \quad (1)$$

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{R'} \quad (2)$$

$2R' = R_2$  et (2)  $\Rightarrow V = V' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{R_2}$  que l'on reporte dans

$$(1) \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R_2 V' - 2Q'$$

A. N. :  $V = 80 \text{ kV}$  et  $Q = 0,8 \mu\text{C}$ .

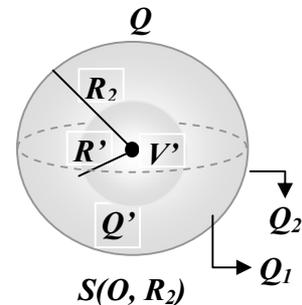
b- A l'état initial  $S$  porte la charge  $Q_0$ . Après influence avec  $S'$  qui porte  $Q'$ , la charge  $-Q'$  va apparaître sur la face interne de  $S$  et donc sur la face externe apparaîtra la charge  $Q'$  qui va s'ajouter à la charge initiale  $Q_0$ . Nous aurons :

Face interne  $Q_1 = -Q'$

Face externe  $Q_2 = Q' + Q_0$

Au total  $S$  porte la charge  $Q = Q_1 + Q_2 = Q_0$ .

On en déduit : La charge totale de  $S$  est restée inchangée même après influence. C'est le principe de conservation de la charge.



## EXE 25

$$W = \frac{1}{2}(qV_A + qV_B - qV_C - qV_D) = \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}} \text{ car :}$$

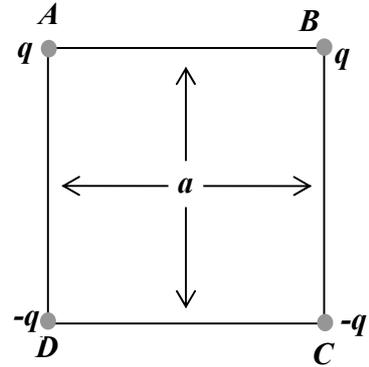
$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a} \right) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}} : \text{C'est le potentiel en } A \text{ du aux charges de } B, C \text{ et } D.$$

$$V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a} \right) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}} : \text{C'est le potentiel en } B \text{ du aux charges de } C, D \text{ et } A.$$

$$V_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}} : \text{C'est le potentiel en } C \text{ du aux charges de } D, A \text{ et } B.$$

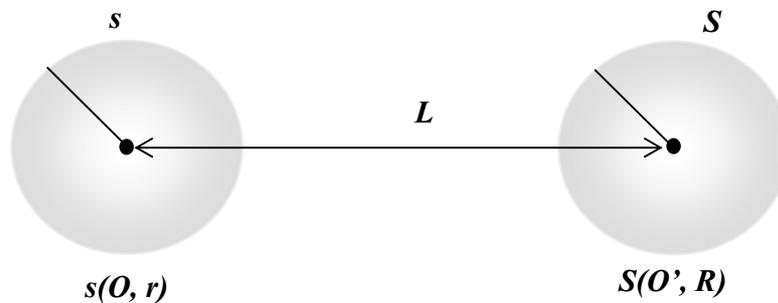
$$V_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}} : \text{C'est le potentiel en } D \text{ du aux charges de } A, B \text{ et } C.$$

L'énergie du système est négative. Le système cède de l'énergie au milieu extérieur. En effet si l'on étudie les forces électriques qui agissent sur chaque charge, on s'aperçoit que la résultante ne peut pas s'annuler. Le système est dans un état instable et il doit céder de l'énergie (les charges doivent se repositionner) pour se stabiliser.



## EXE 27

1)



$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

On déduit de ce système les expressions de  $q$  et  $Q$  :

$$q = r \left( 4\pi\epsilon_0 v - \frac{Q}{L} \right)$$

$$V = \frac{rv}{L} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{r}{L^2} \right)$$

**Remarque**

Pour maintenir  $s$  à un potentiel constant  $v$ , on doit l'alimenter en quantité de charges. En effet on

voit dans l'expression de  $q$  que celle-ci dépend de  $L$ . Si  $L$  change,  $q$  doit aussi subir une modification pour que  $v$  reste le même.

A titre d'exemple : Quand  $S$  est à  $L_0$  de  $s$ ,  $q = r \left( 4\pi\epsilon_0 v - \frac{Q}{L_0} \right)$

Quand  $S$  est à  $\infty$  de  $s$ ,  $q = r 4\pi\epsilon_0 v$

On en déduit que  $s$  à reçu au cours de la variation de  $L$  (de  $L_0$  à l'infini) une charge supplémentaire  $\Delta q$  égale à  $\frac{rQ}{L_0}$ . Soit un apport d'énergie supplémentaire  $\Delta E_{sup}$  égale à  $v\Delta q$ .

2) Les deux sphères sont équivalentes à leurs charges placées à leurs centres. Chaque conducteur exerce sur l'autre une force électrique, d'intensité  $F_e$ , donnée par la loi de Coulomb :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{L^2}. \text{ Si l'on remplace } q \text{ par son expression nous aurons : } F_e = \frac{rQ}{L^2} \left( v - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \right)$$

3) Si  $q$  et  $Q$  sont de même signe, la force sera répulsive et son travail pour un déplacement  $dL$  sera donné par  $dW_e = -F_e dL$ . Pour un déplacement de  $L_0$  jusqu'à l'infini, nous aurons :

$$W_e = - \int_{L_0}^{+\infty} F_e dL = - \frac{rQv}{L_0} + \frac{rQ^2}{4\pi\epsilon_0 2L_0^2}$$

4) L'énergie électrostatique du système est  $W = \frac{1}{2}(qv + QV)$ . On remplace  $q$  et  $V$  par leurs expressions on trouve :

$$\text{A } L = L_0, W_i = \frac{1}{2} \left[ 4\pi\epsilon_0 r v^2 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{r}{L_0^2} \right) \right]$$

$$\text{A } L = \infty : W_f = \frac{1}{2} \left[ 4\pi\epsilon_0 r v^2 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right]$$

5) Le gain en énergie  $\Delta E$  du système au cours du déplacement est :

$$\Delta E = \frac{rQ^2}{8\pi\epsilon_0 L_0^2}$$

A ce gain d'énergie il faut ajouter l'énergie  $\Delta E_{sup}$  vue précédemment.

Le gain réel d'énergie est donc :  $\Delta E + \Delta E_{sup}$

6) On remarque que  $E_e = -\frac{rQv}{L_0} + \Delta E = -\Delta E_{sup} + \Delta E$

Que l'on peut écrire sous la forme  $W_e + \Delta W - \Delta W_{sup} = 0$  et ainsi la conservation de l'énergie est bien vérifiée tout au long du déplacement de  $S$ .

### EXE 28

Nous allons calculer d'abord le champ et le potentiel créés par un cylindre infini quand le Point M est situé entre les armatures.

Symétrie cylindrique,  $S$  = surface de Gauss de hauteur  $h$  et de rayon  $r$ . Le champ est

perpendiculaire à l'axe du cylindre.

$$\text{Théorème de Gauss : } E 2 \pi r h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} 2 \pi R_1 h \Rightarrow E = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r}$$

$$\int_{V_1}^{V_2} -V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} (\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

La charge de l'armature interne de longueur fini  $h$  est  $Q = \sigma 2 \pi R_1 h$ . Le potentiel devient :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}. \text{ On en déduit :}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

$$\text{Si } e = R_2 - R_1 \ll R_1. \ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R_1 + e}{R_1} = \ln \left( 1 + \frac{e}{R_1} \right) \approx \frac{e}{R_1}$$

$$\text{D'où } C = \frac{2\pi\epsilon_0 h R_1}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}. S \text{ étant la surface de l'armature interne}$$

### EXE 29



$$\text{La capacité d'un condensateur plan est } C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Quand on introduit la lame d'épaisseur  $d$ , on se trouve avec deux condensateurs en série de capacité  $C_1$  et  $C_2$ . La capacité équivalente est donnée par  $\frac{1}{C_{\text{équ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$  avec  $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e_1}$  et

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e_2}$$

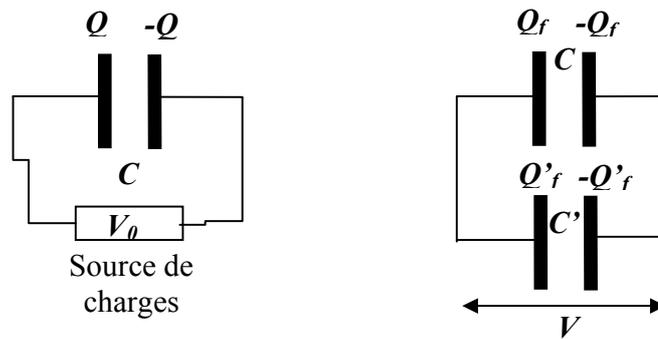
$$\Rightarrow \frac{1}{C_{\text{équ}}} = \frac{e_1}{\epsilon_0 S} + \frac{e_2}{\epsilon_0 S} = \frac{e_1 + e_2}{\epsilon_0 S} = \frac{e - d}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{C} - \frac{d}{\epsilon_0 S}$$

$$\text{Soit } C_{\text{équ}} = \frac{\epsilon_0 S}{\epsilon_0 S - d} C$$

La capacité du condensateur à augmenté. Plus la lame est épaisse plus la capacité obtenue est grande.

Ce moyen d'ajout d'une lame entre les armatures est très utilisé pour usiner des condensateurs ayant les mêmes dimensions mais des capacités différentes.

### EXE 30



Initialement  $Q = C V_0$ .

En reliant  $C$  à  $C'$  les deux condensateurs seront forcément en parallèle :  $V = Q_f/C = Q'_f/C'$ .

Ils partageront donc la charge initiale :  $Q = Q_f + Q'_f \Rightarrow C V_0 = (C + C') V$

On en déduit l'expression de :  $V = \frac{C}{C + C'} V_0$

Les charges seront alors :  $Q_f = C V = \frac{C^2}{C + C'} V_0$  ;  $Q'_f = C' V = \frac{C C'}{C + C'} V_0$