

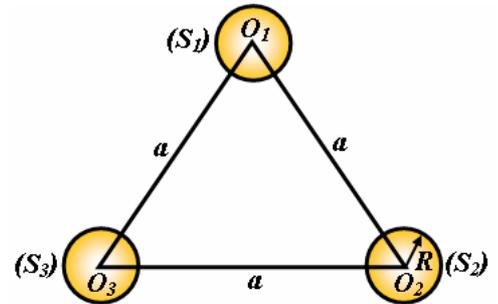


**Physique 1 : Electrostatique - Electrocinétique**

**T.D N° 4 : Electrostatique des Conducteurs**

**Exercice 4.1.**

Trois petites sphères ( $S_1$ ), ( $S_2$ ) et ( $S_3$ ) conductrices, isolées, identiques de rayon  $R$ , sont placées dans le vide aux trois sommets d'un triangle équilatéral de côté  $a$ . Elles portent respectivement les charges  $Q_1, Q_2, Q_3$ .



1. Calculer les potentiels aux centres  $O_1, O_2$  et  $O_3$ .

On posera :

$$\frac{R}{a} = \alpha \quad (\alpha \ll 1)$$

Établir la relation matricielle qui exprime les potentiels  $V_i$  en fonction des charges  $Q_i$  avec  $i = 1, 2$  ou  $3$ . On notera cette matrice  $[D]$ .

2. Si on écrit  $Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$  avec  $j = 1, 2, 3$  et où  $V_j$  est le potentiel de la sphère  $j$  portant la charge  $Q_j$ , on

introduit la matrice  $[C]$  des coefficients de capacité et d'influence  $C_{ij}$  qui exprime les charges  $Q_i$  en fonction des potentiels  $V_i$ .

a) Déterminer cette matrice en considérant que c'est la matrice inverse de celle définie à la première question.

b) Vérifier qu'elle est symétrique, que les coefficients  $C_{ii}$  sont positifs et les coefficients  $C_{ij}$  négatifs.

c) Déterminer ces coefficients en fonction de  $R$  et  $a$  pour  $R \ll a$ .

3. On fait les trois opérations suivantes : la sphère ( $S_1$ ) est connectée à la terre pendant un temps suffisamment long pour que l'équilibre électrostatique se rétablisse, puis la connexion est coupée. On refait la même opération avec ( $S_2$ ), puis avec ( $S_3$ ).

Calculer les charges  $Q'_1, Q'_2$  et  $Q'_3$  (en fonction des charges  $Q_1, Q_2, Q_3$  et  $a$ ) des trois sphères après ces trois opérations.

**Remarque :** La matrice des coefficients d'influence  $[C]$  est l'inverse de la matrice  $[D]$ . Elle s'obtient :

$$[C] = [D]^{-1} = \frac{1}{\det[D]} \text{com}^t([D])$$

• la matrice transposée  ${}^t[D]$  est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes.

la matrice complémentaire  $\text{com}^t([D])$  est obtenue en remplaçant chaque élément par le cofacteur correspondant, c'est-à-dire le déterminant obtenu en barrant la ligne et la colonne du terme considéré, affecté du signe :

- + si la somme  $i + j$  est paire,
- si la somme  $i + j$  est impaire.

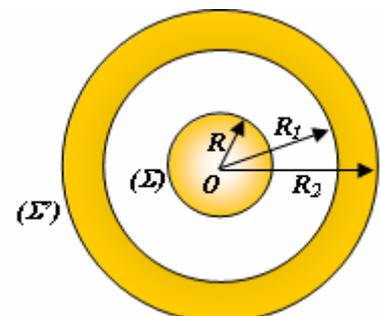
•  $\det[D]$  est le déterminant  $\Delta$  de la matrice  $[D]$ .

**Exercice 4.2.**

Une sphère métallique ( $\Sigma$ ) de centre  $O$  et de rayon  $R$  est reliée à la terre (potentiel nul). On l'entoure par une sphère conductrice et concentrique ( $\Sigma'$ ) de rayon  $R_1$  et  $R_2$  portant une charge  $Q_2$  et placée au potentiel  $V_2 = 12$  V.

On donne :  $R = 6$  cm,  $R_1 = 8$  cm et  $R_2 = 10$  cm.

Avec :  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  S.I.



1. Donner la répartition des charges sur  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma)'$ .
2. Calculer le potentiel  $V$  en tout point (le potentiel est nul à l'infinie).
3. En déduire la charge sur chaque face des deux sphères en fonction de  $V_2$ ,  $R$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Calculer ces charges.
4. Calculer les coefficients d'influences et de capacités  $C_{12}$  et  $C_{22}$  des deux sphères.
5. Dans le cas où  $R = 0.99 \text{ cm}$ ,  $R_1 = 1 \text{ cm}$  et  $R_2 = 2 \text{ cm}$ . Recalculer les charges qui apparaissent sur chaque face des deux sphères. En déduire les coefficients  $C_{12}$  et  $C_{22}$ . Conclusion.

### Exercice 4.3. <sup>[\*]</sup>

Une sphère métallique  $(S_1)$  de rayon  $R_1 = 9 \text{ cm}$  porte la charge positive  $Q_1 = 10^{-8} \text{ C}$ .

1. Quels sont la capacité  $C_1$  et le potentiel  $V_1$  de  $(S_1)$  ?
2. On relie  $(S_1)$  à une autre sphère métallique  $(S_2)$  de rayon  $R_2 = 1 \text{ cm}$ , par un fil conducteur long et fin.  $(S_2)$  est suffisamment éloigné de  $(S_1)$  pour négliger l'influence mutuelle de  $(S_1)$  et  $(S_2)$ . Les charges superficielles sur le fil fin sont supposées négligeables.

Calculer, à l'équilibre, les charges  $Q'_1$  et  $Q'_2$  portées par les deux sphères et la valeur du champ électrique au voisinage de chaque sphère.



[\*] (A faire comme devoir à la maison)