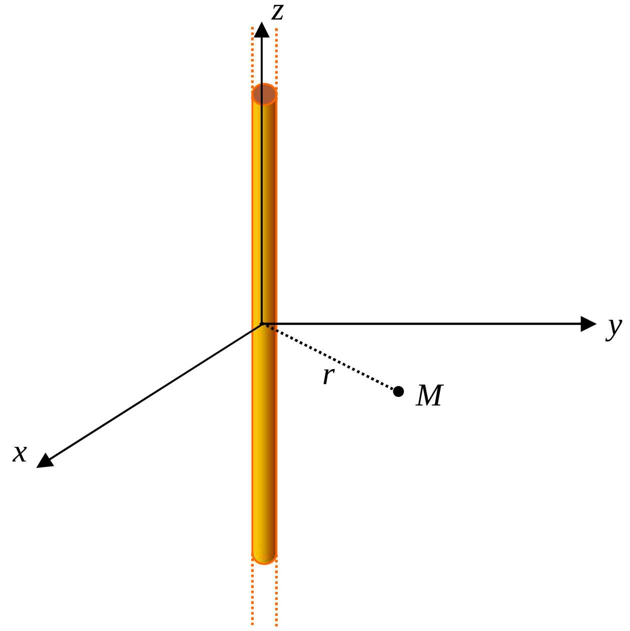
UNIVERSITE IBN TOFAIL **Année Universitaire 2014/2015**
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
Cycle Intégré Préparatoire aux Formations d'Ingénieurs

Module M 1.4 : Electrostatique - Electrocinétique

T.D N° 3 : Application du théorème de Gauss

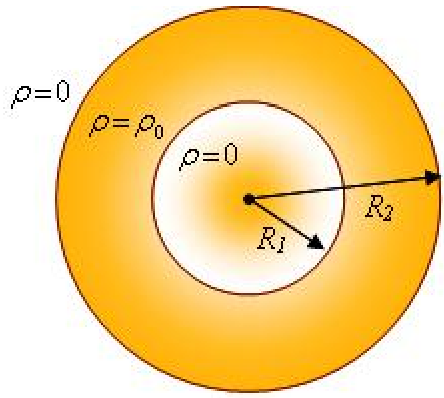
Exercice 3.1. *Champ électrostatique créé par une distribution linéique de charges*

Soit un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ [0. En utilisant le théorème de Gauss, donner l'expression du champ $\vec{E}$ en un point M à une distance r de ce fil.



Exercice 3.2. *Champ électrostatique créé par une distribution sphérique de charges*

On creuse dans une sphère de centre O et de rayon R_2 une cavité sphérique de même centre O et de rayon R_1. Il n'y a pas de charge dans la cavité. Dans le volume sphérique restant, la densité volumique de charges est $\boldsymbol{\rho_0 = cte > 0}$.



On obtient la distribution de charges suivante :

°$(r)=0$ si $r<R_1$

°$(r)=$°$_0$ si $R_1<r<R_2$

°$(r)=0$ si $r>R_2$

1. Un point M est repéré par la distance $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$. Déterminer les plans de symétrie et les invariances de cette distribution de charges.

Montrer ensuite que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par ce système est :

1.1. Radial

1.2. L'intensité est constante sur toute sphère de centre O et de rayon r.

2. Rappeler le théorème de Gauss. Quelles sont les précautions à prendre pour appliquer ce théorème ? Quelle est la surface de gauss adaptée au problème ?

3. Trouver les expressions du champ $\vec{E}(M)$, puis du potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace (en prenant $\boldsymbol{V(\infty) = 0}$).

4. Tracer l'allure des courbes $E(r)$ et $V(r)$.

On donne l'expression du gradient en coordonnées sphérique : $\overrightarrow{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$.

<u>Exercice 3.3.</u> ***Etude d'une distribution sphérique de charge – Equation de Poisson***

On considère une sphère de rayon R chargée d'une densité volumique ρ uniformément répartie.

1. En utilisant le théorème de Gauss, trouver les expressions du champ $\vec{E}(M)$, puis du potentiel *V(M)* en tout point de l'espace (en prenant *V(∞)* **=** 0).

2. Retrouver l'expression du potentiel *V(M)* en intégrant l'équation de Poisson.

On donne l'expression du laplacien en coordonnées sphérique :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

<u>Exercice 3.4.</u> ***Etude d'une distribution cylindrique de charge***

On considère un cylindre de rayon *R* et de longueur infinie, uniformément chargé en volume avec une densité volumique $\rho > 0$.

1. Quelle est la direction du champ électrostatique en tout point *M* de l'espace ?

2. Montrer que la valeur du champ électrostatique ne dépend que de la distance *r* entre *M* et l'axe du cylindre.

3. En utilisant le théorème de Gauss et en précisant la surface utilisée, calculer le champ dans les deux cas suivants:

- $r > R$
- $r < R$

On donnera *E* en fonction de *r*.

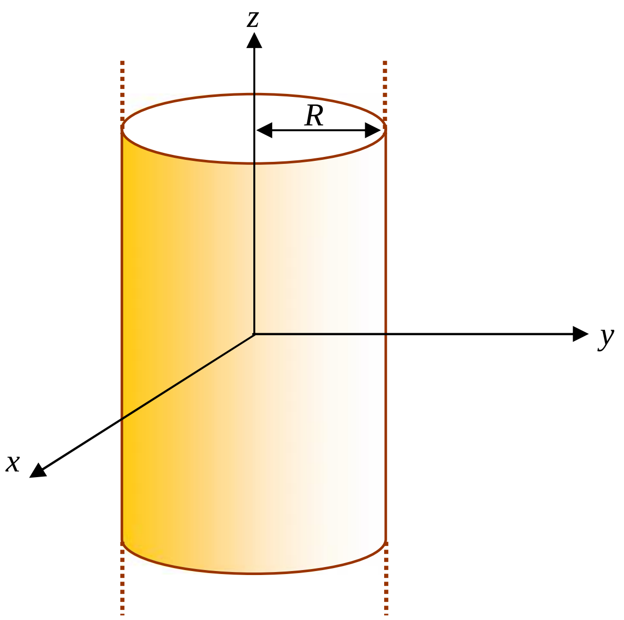
4. Calculer le potentiel électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. On impose la condition $V = 0$ pour $r = 0$.

5. La densité volumique de charge ρ du cylindre n'est plus uniforme mais à symétrie cylindrique (ρ est une fonction de *r*).

On donne $\rho = \rho_o(r/R)$ pour $r < R$ et avec ρ_o une constante.

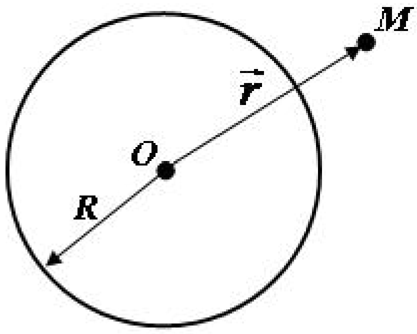
Déterminer le champ électrostatique dans le cas où $r < R$.

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindrique : $\overrightarrow{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.



<u>Exercice 3.5.</u> ***Modélisation du noyau des atomes (Contrôle de rattrapage 2013/2014)*** [*]

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution de charge à l'intérieur d'une sphère de centre ***O*** et de rayon ***R***. On désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point ***M*** quelconque de l'espace.



Pour ***r*** $\leq$ ***R***, la densité de charges volumique ρ***(M)*** qui représente le noyau varie en fonction de ***r*** suivant la loi :

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Où ρ_0 est une constante positive.

1. Exprimer la charge totale ***Q*** du noyau en fonction de ρ_0 et ***R***.

2. Expliciter les symétries et invariances du système, puis déduire l'orientation et les variables dont dépend le champ électrostatique crée.

3. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_{ext}(M)$ en tout point ***M*** extérieur à la sphère en fonction de ρ_0, ε_0, ***R, r*** et $\vec{e}_r$.

4. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_{\text{int}}(M)$ en tout point ***M*** intérieur à la sphère en fonction de ρ_0, ε_0, ***R, r*** et $\vec{e}_r$.

5. Calculer le potentiel électrique $V_{ext}(M)$ en tout point ***M*** extérieur à la sphère. La constante d'intégration est déterminée avec les conditions initiales (***V(r*** $\to \infty$***) = 0***). On donne l'expression du vecteur gradient en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$.

6. Calculer le potentiel électrique $V_{\text{int}}(M)$ en tout point ***M*** intérieur à la sphère. Montrer que la constante d'intégration est égale à $\frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}$, (on utilisera la continuité du potentiel pour ***r = R***).

[*] **(A faire comme devoir à la maison)**