On écrit la loi de Pouillet corrigée pour toutes les mailles :

$10 = 5.10^3\, i_1 - 2.10^3\, i_3 \quad \Rightarrow 10^{-2} = 5i_1 - 2i_3$

$10 - 20 = 5.10^3\, i_2 - 2.10^3\, i_3 \quad \Rightarrow 10^{-2} = 2i_3 - 5i_2$

$0 = 12.10^3\, i_3 - 2.10^3\, i_2 - 2.10^3\, i_1 \quad \Rightarrow 6\, i_3 = i_2 + i_1$

Les deux premières équations donnent $4\, i_3/5 = i_2 + i_1$ avec la troisième on en déduit que $i_3 = 0$. Dans ce cas $i_1 = -\, i_2 = 0{,}2\ A$.

On comparant les branches du circuit initial et du circuit éclaté, on en déduit :

$I_1 = i_1 = 0{,}2\ A$

$I_2 = -i_2 = 0{,}2\ A$

$I_3 = i_3 = 0\ A$. On retrouve le résultat de la question 1.

$I_4 = i_3 - i_2 = 0{,}2\ A$

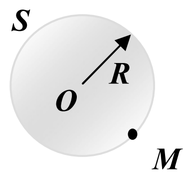
$I_5 = i_3 - i_2 = 0{,}2\ A$

Excepté la résistance de $8\ k\Omega$, le même courant parcourt toutes les branches.

Problèmes de révision

Pro1

Une sphère conductrice S de centre O et de rayon R, contient une distribution de charges uniforme qui crée donc en tout point de l'espace un champ électrostatique $\vec{E}$.

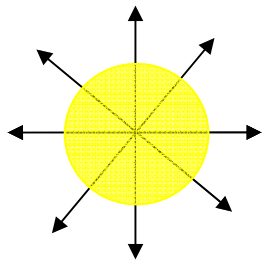


1- Donner et expliquer la nature de la distribution de charges.
2- Quelle est la valeur du champ à l'intérieur de S. Justifier votre réponse.
3- Calculer le champ à l'extérieur de **S** tout en restant au voisinage de la surface de celle-ci.
4- Schématiser les lignes de champ au voisinage de S. Justifier votre réponse.
5- En déduire le module E du champ en un point M de la surface de S.
6- Calculer le module df de la force électrostatique $\vec{df}$ exercée par les autres charges de la sphère sur une charge ponctuelle dq placée en M.
7- En déduire la pression électrostatique P exercée sur dq.

Solution
Pro1

1- La distribution est surfacique σ car ***S*** est un conducteur.
2- Et donc, selon le théorème de Gauss, en tout point à l'intérieur de ***S*** le champ sera nul
3- On applique le théorème de Coulomb. Le champ au voisinage de S est

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Ligne de champ

4- ***S*** est un conducteur. Tout conducteur est équipotentiel. La surface de ***S*** est une surface de niveau. Les lignes de champ sont donc perpendiculaires à ***S***.
5- Dans S $E = 0$

Au voisinage de **S** du coté extérieur $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

En ***M***, on prend la moyenne $E(M) = \frac{E_{int} + E_{ext}}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

6- Calculer le module $df = dq\, E = s\, dS\, E$. En remplaçant ***E*** par son expression $df = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS$.

7- De la question précédente on déduit : $P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

Prob2

Une sphère conductrice ***S***, de rayon intérieur ***R*** et de centre ***O***, est placée dans le vide. ***M*** désigne un point quelconque de l'espace tel que $OM = r$. L'origine des potentiels est prise à l'infini.

1- ***S*** porte une charge Q_0. Donner, sans faire de calcul, le potentiel $V(r)$ créé par Q_0 quand $r < R$ et $r = R' > R$. Justifier votre réponse.
2- On place ***S*** dans une deuxième sphère ***S'***, de rayon ***R'***, de sorte que les deux sphères soient concentriques.
Initialement ***S'*** porte la charge Q'_0. Après influence, sa charge devient $Q' = Q_1 + Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont respectivement les charges portées par les faces interne et externe de ***S'***.
 a- Déterminer ***Q'***.
 b- Calculer, en fonction de ***R'*** et Q_2, le potentiel ***V'*** de ***S'***.
 c- En déduire, en fonction de ***R***, ***R'*** et Q_0, l'expression de la différence de potentiel $V-V'$.
 d- Montrer que si l'on relie ***S'*** à la masse, le nouveau potentiel de ***S*** (noté V_n) prend la valeur $V-V'$.
 e- En déduire la capacité ***C*** du condensateur ainsi formé.

Solution
Prob2

1- Une sphère portant une charge en surface est équivalente à sa charge concentrée à son origine.
Donc quand $r = R' > R$, le potentiel est $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r}$
Quand $r < R$, la sphère étant conductrice, son potentiel est constant. D'après la continuité du

potentiel nous aurons $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_0}{R}$

2- On place ***S*** dans une deuxième sphère ***S'***, de rayon ***R'***, de sorte que les deux sphères soient concentriques.
Initialement ***S'*** porte la charge Q'_0. Après influence, sa charge devient $Q' = Q_1 + Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont respectivement les charges portées par les faces interne et externe de ***S'***.

a- $Q' = Q_1 + Q_2$ avec $Q_1 = -Q_0$ et $Q_2 = Q_0 + Q'_0$.
Soit $Q' = -Q_0 + Q_0 + Q'_0 = Q'_0$.
Résultat prévu puisque la charge totale de ***S'*** doit rester la même selon le principe de la conservation de la charge.

b- ***V'*** est du à la présence de la charge Q'_0 et de la charge ***Q'***. On peut donc écrire :

$$\left.\begin{aligned} V' &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q_0+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R'} \end{aligned}\right\} \quad d'où \quad V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R'}$$

c-

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q_0+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) + V' \end{aligned}\right\} \quad d'où \quad V - V' = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)$$

d- S' est à la masse, son potentiel et sa charge externe deviennent nuls. Sa charge totale est celle de la face interne c'est-à-dire $-Q_0$.

$$\left.\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q_0}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) \end{aligned}\right\} \quad d'où \quad V_n = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) = V - V'$$

e- Sachant que la capacité d'un condensateur à influence totale est $C = \dfrac{Q_0}{V-V'}$, on en déduit que $C = 4\pi\varepsilon_0\dfrac{RR'}{R+R'}$

<u>Remarque</u> : *On peut calculer* ***C*** *avant de relier* ***S'*** *à la masse, le résultat reste le même ; ceci*

montre que la capacité est indépendante de la charge et du potentiel et ne dépend que de la géométrie et des dimensions du condensateur.

Pro3

Considérons le réseau de la figure 1 où ***G*** est un générateur de ***6 Volts*** et R_1, R_2 et R_3 sont des résistances égales respectivement à $12\ \Omega$, $6\ \Omega$ et $12\ \Omega$.

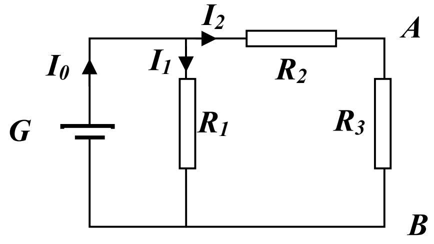


Figure 1

1- **a.** Combien le réseau comporte-t-il de nœuds et de branche ?
   b. Combien d'équations indépendantes pouvons-nous obtenir à l'aide des lois de Kirchhoff ?
   c. Etablir ces équations et résoudre le système obtenu.
2- En utilisant la méthode des mailles indépendantes, retrouver ces courants. En déduire la valeur de la d.d.p. $V_A - V_B$.
3- A l'aide des résultats précédents, trouver la valeur $V_A - V_B$ de la tension entre les bornes ***A*** et ***B*** du circuit de la figure 2.

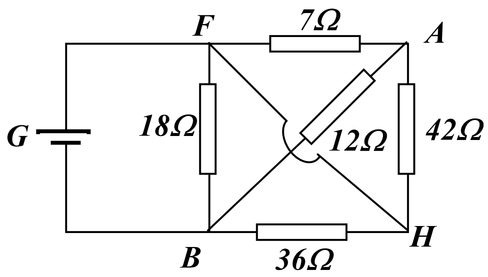


Figure 2

Solution
Pro3

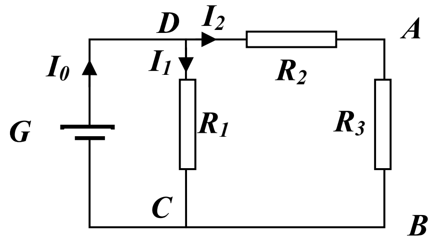
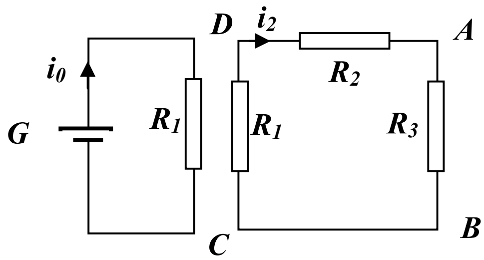


Figure 1

1- **a.** Le circuit contient $n = 2$ nœuds ; C et D. Il contient aussi $b = 3$ branches : $DABC$, DC en passant par R_1 et DC en passant par **G**.
b. Loi aux nœuds : $n - 1 = 1$ équation
Loi aux mailles : $b - (n - 1) = 3 - 1 = 2$ équations indépendantes.
c. $I_0 = I_1 + I_2$
$G = (R_2 + R_3)\, I_2$
$G = R_1 I_1$
Ce qui donne : $I_1 = \dfrac{G}{R_1} = 0{,}50\ A$; $I_2 = \dfrac{G}{R_1 + R_2} = 0{,}33\ A$;
$$I_0 = \frac{(2R_1 + R_2)G}{R_1(R_1 + R_2)} = 0{,}83\ A$$

2- Le circuit comporte deux mailles indépendantes. On choisi comme sens positif celui des aiguilles d'une montre. i_0 et i_2 sont les courants fictifs de chaque maille. On applique pour chaque maille la loi de Pouillet modifiée.



$G = R_1 i_0 - R_1 i_2$
$0 = (R_1 + R_2 + R_3)\, i_2 - R_1 i_0$
On en déduit facilement que :
$$i_0 = \frac{(R_1 + R_2 + R_3)G}{(R_2 + R_3)R_1} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{G}{R_2 + R_3}$$
A. N. : $i_0 = \dfrac{5}{6} = 0{,}83A$; $i_2 = \dfrac{1}{3} = 0{,}33A$
En comparant le circuit réel à la représentation des mailles indépendantes, on a :
$I_0 = i_0 = 0{,}83\ A$; $I_2 = i_2 = 0{,}33\ A$; $I_1 = i_0 - i_2 = 0{,}50\ A$
$V_A - V_B = R_3 I_2 = 4\ V.$

3- Les bornes F et H du circuit de la figure 2 sont au même potentiel. On peut les réunir et dans ce cas il apparaît que les résistances **7 Ω** et **42 Ω** sont en parallèles de même que les résistances **18 Ω** et ***36 Ω***. Le circuit obtenu est identique à celui de la figure 1 et $V_A - V_B = 4\ V.$