Rappels Mathématiques

1. Les vecteurs

Un vecteur est un objet mathématique qui possède une intensité et une direction.

On désignera un vecteur au moyen d'un symbole surmonté d'une flèche $(\vec{V})$ et son intensité par le symbole sans la flèche V.

La composante d'un vecteur sur un axe donné est la longueur de la projection du vecteur sur l'axe. Soit trois axes orthogonaux X, Y et Z. Un vecteur (tridimensionnel) est complètement déterminé par ses composantes x, y, z sur les trois axes. On écrit $\vec{V} = (x, y, z)$. Cela dit, il est important de remarquer que le vecteur est indépendant des axes choisis (c'est-à-dire du référentiel), tandis que les composantes changent si l'on effectue une rotation des axes, par exemple.

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la grandeur est égale à 1. On le désigne par une lettre minuscule ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{u}$, etc.). Pour tout vecteur $\vec{V}$ non nul, $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V}$ est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{V}$. Les trois vecteurs unitaires ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) sont parallèles aux axes X, Y, Z, respectivement et manifestement,

$$\vec{V} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \tag{1.1}$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un nombre, noté $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ et défini comme

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{1.2}$$

On peut montrer que $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = V_1\,V_2\cos\alpha$. α est l'angle entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$. Le produit $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ est un scalaire, en ce sens que sa valeur ne change pas si l'on effectue une rotation des axes x, y et z.

On a

$$\vec{V}\cdot\vec{V} = x^2 + y^2 + z^2 = V^2 \tag{1.3}$$

- Le produit vectoriel de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur, noté $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ et défini comme

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\,\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

On peut montrer que $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, dont l'intensité est égale à $V_1.V_2\,|\sin\alpha|$ et dont le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite.

Il n'est pas difficile de montrer que :

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = -\,\vec{V_2}\wedge\vec{V_1} \tag{1.5}$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_1} \quad (1.6)$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_2} \cdot (\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1}) = \overrightarrow{V_3} \cdot (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) \quad (1.7)$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_3}) . \overrightarrow{V_2} - (\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}) . \overrightarrow{V_3} \quad (1.8)$$

- La dérivée d'un vecteur par rapport à une variable s'effectue composante par composante. La dérivée d'un produit scalaire ou d'un produit vectoriel suit les lois de la dérivée d'un produit ordinaire.

2. Les systèmes de coordonnées

Rappel : L'intégrale d'une fonction $f(x)$ entre deux bornes a et b est égale à l'aire sous la courbe associée. Pour obtenir une valeur approximative de l'aire, on peut faire la construction illustrée à la figure 1.1. On divise l'intervalle (a,b) en n sous intervalles égaux de longueur Δx, et on évalue l'aire de chacun des rectangles indiqués.

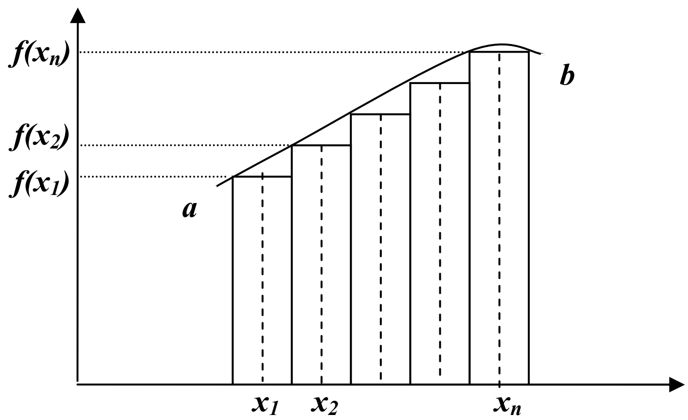


Fig. 1.1: Approximation de l'aire sous une courbe.

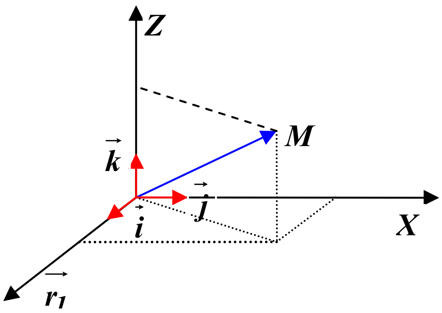
On ainsi :

$$\text{Aire sous la courbe} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad (1.9)$$

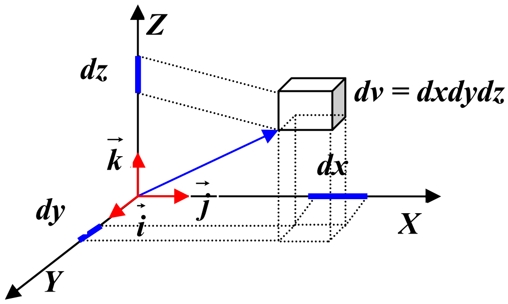
Et donc
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad (1.10)$$

Une fonction d'une variable peut être intégrée sur un intervalle. On effectue donc les calculs dans l'espace à une dimension. De même, une fonction de deux variables peut être intégrée sur une surface (on utilise dans ce cas l'intégrale double $\iint$), les calculs sont réalisés dans l'espace à deux dimensions. En fin, une fonction de trois variables peut être intégrée sur un volume (on utilise l'intégrale triple $\iiint$) et on calcul donc dans l'espace à trois dimensions.

a- Coordonnées cartésiennes

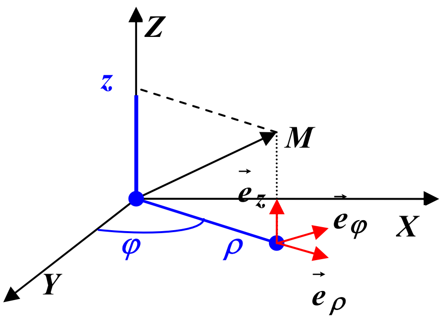


M = M (x,y,z)

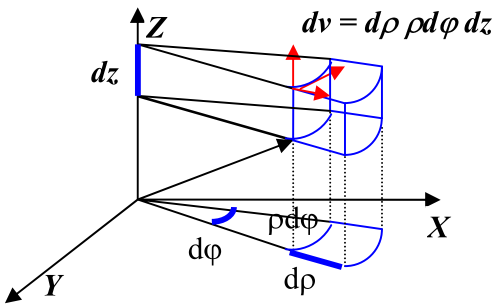


Elément de volume

b- Coordonnées cylindriques.



M = M (ρ,φ,z)



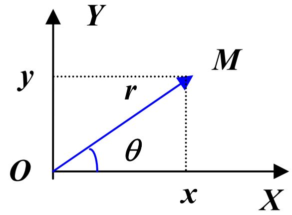
Elément de volume

En faisant varier ρ de $\boldsymbol{0}$ à $\boldsymbol{R}$, φ de $\boldsymbol{0}$ à 2π et z de $\boldsymbol{0}$ à une valeur $\boldsymbol{h}$, le point $\boldsymbol{M}$ décrira un cylindre d'axe $\boldsymbol{OZ}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de hauteur $\boldsymbol{h}$. On écrit :

$v = \iiint_v dv = \iiint_v d\rho\rho d\varphi dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \frac{R^2}{2} 2\pi h$. C'est-à-dire que $v = \pi R^2 h$ qui est bien le volume du cylindre. On peut obtenir la surface (donc deux dimensions) du même cylindre en fixant dés le début $\rho = R$: $s = \iint_s ds = \int_0^{2\pi} R d\varphi \int_0^h dz = 2\pi Rh$.

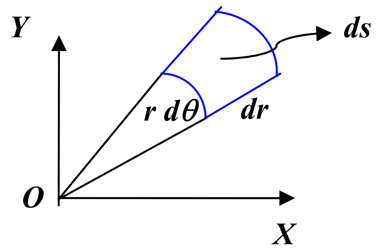
Cas particulier : coordonnées polaires.

Quand $z = 0$, le système est réduit à deux dimensions φ et ρ, que l'on note par habitude θ et **r**. Dans ce cas on peut représenter ***OM*** ainsi que l'élément de surface ***ds*** dans le référentiel ***OXY***.



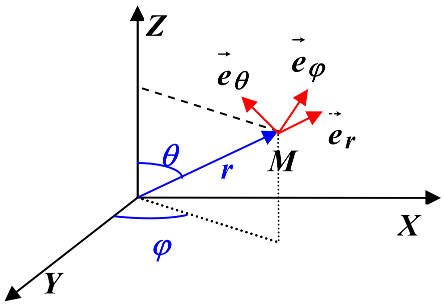
$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

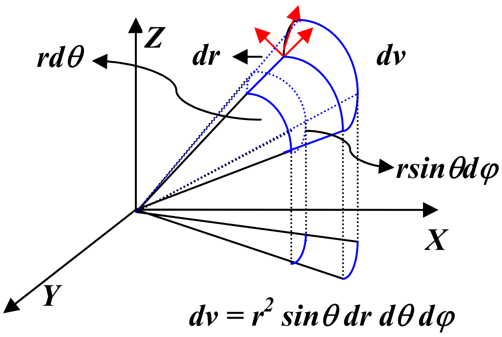


$ds = r\,dr\,d\theta$

c- Coordonnées sphériques.



$M = M\,(r,\theta,\varphi)$



$dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Elément de volume

En faisant varier r de 0 à R, θ de 0 à π et φ de 0 à 2π, le point M décrira une sphère de rayon R et de centre O. On écrit :

$v = \iiint_v dv = \iiint_v r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3}.2.2.\pi$. C'est-à-dire que

$v = \frac{4}{3}\pi R^3$ qui est bien le volume de la sphère.

On peut obtenir la surface (donc deux dimensions) de la même sphère en fixant dés le début $r = R$: $s = \iint_s ds = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$.

3. Analyse vectorielle

Un objet mathématique qui dépend des coordonnées spatiales **x**, **y**, et **z** est appelé un champ. Un champ peut aussi dépendre du temps. Un champ peut être scalaire ***(f(x, y, z)*** ou ***f(x, y, z, t))*** ou vectoriel. Un champ vectoriel est un vecteur qui dépend de x, y, z (et, peut-être aussi, de t). Chaque composante du champ peut être fonction des trois variables spatiales x, y et z.

$$\vec{V}(\vec{r}) = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z)) \qquad (1.11)$$

On écrit aussi $\vec{V}(\vec{r})$ ou $\vec{V}(\vec{r}, t)$.

Un vecteur qui ne dépend pas de $\vec{r}$ est un champ dit uniforme. Un champ indépendant du temps est dit constant.

Exemples. Le champ électrique, le champ magnétique et la vitesse d'un fluide sont des champs vectoriels, tandis que la température, la pression, et la densité de l'atmosphère sont des champs scalaires.

3.1. LES OPERATEURS : Gradient, divergence et rotationnel.

a- L'opérateur gradient

Soit $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ un champ scalaire. On peut, en général, calculer les dérivées partielles de f par rapport aux variables x, y et z (de même que les dérivées secondes, etc.). Soit $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{r} + \vec{dr} = (x+dx, y+dy, z+dz)$ deux points séparés par une distance infiniment petite. La différence entre $f(\vec{r} + d\vec{r})$ et $f(\vec{r})$ est, au premier ordre, donnée par les premiers termes de la série de Taylor :

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1.12)$$

Définissons un champ vectoriel noté $\overrightarrow{grad}\, f$ dont l'expression est :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Le second membre de l'équation 1.10 serait le produit : $\overrightarrow{gradf}.d\vec{r}$. Alors on peut écrire :

$$\overrightarrow{gradf}.d\vec{r} = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1.13)$$

Le champ $\overrightarrow{gradf}$ est appelé gradient de f. L'opérateur gradient est un champ <u>vectoriel</u> agissant sur une fonction <u>scalaire</u>.

$$\overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.14)$$

Pour un $\vec{dr}$ donné, il est clair que $f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$ sera maximum si $d\vec{r}$ est parallèle à $\overrightarrow{gradf}$. Ainsi, le gradient donne la direction de variation maximum d'une fonction. Par ailleurs, une fonction ne varie pas dans une direction orthogonale au gradient.

b- L'opérateur divergence.

Soit un champ vectoriel $\vec{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$. La divergence de $\vec{V}$ est le champ scalaire noté $div\vec{V}$ et défini comme $div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$.

La signification physique de la divergence sera examinée plus tard.

c- L'opérateur rotationnel.

Soit un champ vectoriel $\vec{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$. Le rotationnel de $\vec{V}$ est le champ vectoriel $\overrightarrow{rot\vec{V}}$ noté et défini comme :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

La signification physique du rotationnel sera examinée plus tard. Il est aisé de montrer que, pour tout champ scalaire $f(\vec{r})$, $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{grad}\,f(\vec{r})) = \vec{0}$, c'est à dire que le rotationnel d'un gradient s'annule toujours. Inversement, on peut montrer que si $\vec{V}$ est un champ vectoriel tel que $\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$, alors il existe un champ scalaire f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{grad}f$. On dit que $\vec{V}$ est un gradient. Il est aisé de montrer que, pour tout champ vectoriel $div(\overrightarrow{rot}\vec{V}) = 0$, c'est à dire que la divergence d'un rotationnel s'annule toujours. Inversement, on peut montrer que si $\vec{V}$ est un champ vectoriel tel que $div\vec{V} = \vec{0}$, alors il existe un champ vectoriel $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = \overrightarrow{rot}\vec{V}$. On dit que $\vec{W}$ est un rotationnel.

d- L'opérateur Nabla $\vec{\nabla}$.

C'est un opérateur vectoriel qui a pour composante : $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ tel que :

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\,f(x,y,z)$$
$$\vec{\nabla}\vec{V}(x,y,z) = div\vec{V}(x,y,z)$$
$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{V}(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\vec{V}(x,y,z)$$

e- L'opérateur Laplacien Δ

C'est un opérateur scalaire obtenu par deux applications successives de $\vec{\nabla}$ sur un champ de scalaires : $\Delta f(x,y,z) = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} f(x,y,z)) = div\,(\overrightarrow{grad}\,f(x,y,z)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

4. Théorèmes fondamentaux.

4.1 Circulation d'un vecteur.

Soit, dans l'espace, un champ vectoriel $\vec{E}(\vec{r})$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$). Sur tous les points de la courbe ***ab*** (figure1.2), $\vec{E}(\vec{r})$ peut avoir une direction différente. En particulier entre deux points voisin ***M*** et ***M'***. On appelle circulation de $\vec{E}(\vec{r})$ le long de la courbe ***ab***, la quantité :

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dl} \qquad (1.15)$$

$\vec{E}(\vec{r}).\vec{dl}$ est la circulation élémentaire de $\vec{E}(\vec{r})$ le long de $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$

$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl.\cos\alpha$

- **Si** $\vec{E} \perp \vec{dl}$, $\cos\alpha = 0$ **et donc** $C(\vec{E}/ab) = 0$
- **Si** $\vec{E} // \vec{dl}$, $\cos\alpha = 1$ **et donc**

$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl$ si en plus E est uniforme (constant en tout point M de ab) alors :

$C(\vec{E}/ab) = E\int_{ab} dl = E.ab$

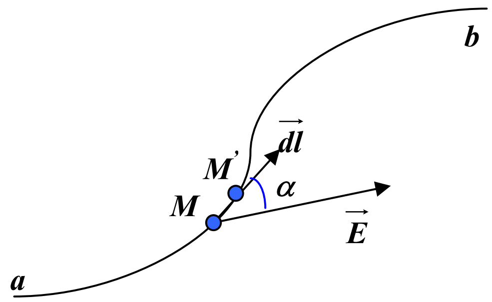


Figure 1.2

4.2. Flux d'un vecteur à travers une surface.

A dS on associe $\vec{dS}$ dont les caractéristiques sont : - module : aire de dS

- direction : normale en M à dS
- sens : au choix

$\vec{dS} = dS.\vec{n}$

Par définition, on appelle flux de $\vec{E}$ à travers la surface S, la quantité : $\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S \vec{E}\vec{dS}$

- Si $\vec{E} \perp \vec{dS}$, $\cos\alpha = 0$ et $\Phi(\vec{E}/S) = 0$. Le flux est minimal.

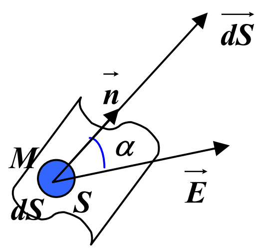


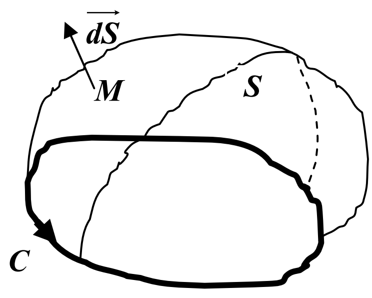
Figure 1.3

- Si $\vec{E} // \vec{dS}$, $\cos\alpha = 1$ et $\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S EdS$. Si en plus E est uniforme (constant en tout point M de S) alors $\Phi(\vec{E}/S) = E\iint_S dS = E.S$. Le flux est maximal. On peut imaginer que le flux d'un champ vectoriel à travers une surface serait la quantité de vecteurs qui traverse cette même surface.

4.3. Théorème de Stokes.

Soit : - Un Champ de vecteurs $\vec{E}$.
- Une courbe fermée C
- Une surface S s'appuyant sur C

Important : Nous avons orienté la courbe C (flèche), en un point M de S, le vecteur surface $\vec{dS}$ obéira à la règle du tir bouchon ou à la règle des trois doigts de la main droite.



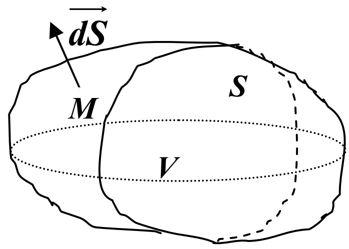
Enoncé : La circulation de E à travers (C) est égale au flux à travers S de son rotationnel.

$$\oint_C \vec{E}\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}\vec{dS} \qquad (1.16)$$

Le symbole $\oint_C$ signifie que la courbe d'intégration (***C***) est fermée.

4.4. Théorème de Green Ostrogradski.

Soit : - Un Champ de vecteurs $\vec{E}$.
- Une courbe fermée ***C***
- Une surface fermée ***S*** délimitant un volume ***V***



<u>Important</u> : Quand la surface est fermée, on oriente $\overrightarrow{dS}$ de l'intérieur vers l'extérieur.

Enoncé : Le flux de $\vec{E}$ à travers (***S***) est égale à l'intégrale triple de sa divergence.

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\,\vec{E}.dV \qquad (1.17)$$

Le symbole $\oiint_S$: signifie que la surface d'intégration (***S***) est fermée.