II.1.1 Cas ou le champ est produit par une seule charge.

On reprend ici l'expression (1.15) qui donne la circulation d'un vecteur le long d'une courbe :

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dl} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

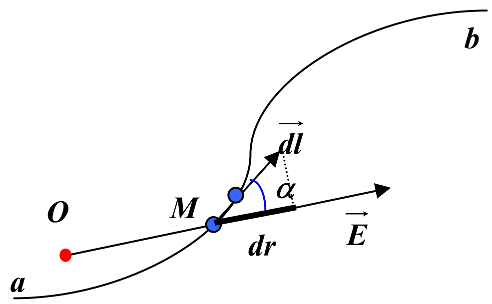
$\vec{E}(\vec{r}).\vec{dl} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{u}.\vec{dl}$ $\quad \vec{u}.\vec{dl} = dl\cos\alpha = dr$ est la projection de $\vec{dl}$ sur la direction OM.

D'où :

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl.\cos\alpha = \int_{ab} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{dr}{r^2}\right]_A^B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

où $r_A = OA$ et $r_B = OB$.



La circulation de $\vec{E}$ ne dépend que de A et B, elle ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

On peut écrire :

$$C(\vec{E}/ab) = f(A) - f(B)$$

Cas particulier : AB est une courbe fermée $A \equiv B$. Dans ce cas $r_A = r_B$ et $C(\vec{E}/AB) = \oint_{AA} \vec{E}\vec{dl} = 0$. On en déduit d'après le théorème de Stokes que : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$. On dit que la circulation de $\vec{E}$ est conservative.

II.1.2 Le champ est produit par un ensemble de charges ponctuelles.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ placées en $O_1, O_2, \ldots, O_n$. En un point M de AB, ces chargent créent un champ : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$.

$$==> C(\vec{E}/AB) = \int_{AB} \vec{E}\vec{dl} = \int_{AB} \vec{E}_1\vec{dl} + \int_{AB} \vec{E}_2\vec{dl} + \ldots + \int_{AB} \vec{E}_n\vec{dl} = \sum_{i=1}^{n} C(\vec{E}_i/AB)$$

et d'après II.1.1 :

$$C(\vec{E}_i/AB) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{O_iA} - \frac{1}{O_iB}\right].$$

II.2- Potentiel électrique.

$$C(\vec{E}/AB) = \sum_{i=1}^{n} C(\vec{E}_i/AB) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{O_iA} - \frac{1}{O_iB}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{O_iA} - \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{O_iB}$$

$$= \text{fonction de } A - \text{fonction de } B$$

On définit ainsi une fonction de points à valeur scalaire ; on la note V et on l'appelle potentiel électrique. Ainsi on a :

$$\int_{AB} \vec{E}\vec{dl} = V(A) - V(B) = \text{différence de potentiel entre } A \text{ et } B.$$

En un point quelconque M entre A et B le potentiel s'écrit donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} + k \quad \text{avec } r_i = OM$$

Il est défini à une constante prés. Par convention on suppose que le potentiel à l'infini est nul : $V(\infty) = 0 \Rightarrow r_i \Rightarrow \infty \Rightarrow k = 0$.
Doù :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \tag{3.1}$$

Une seule charge ponctuelle, placée en un point O, crée donc en tout point M de l'espace un potentiel : $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ où $r = OM$.

II.3- Relation entre le champ et le potentiel électrique.

Les propriétés électrostatiques de l'espace peuvent être représentés soit par un champ de vecteurs $\vec{E}(x,y,z)$ soit par un champ de scalaires $V(x,y,z)$. Cherchons la relation entre ces deux grandeurs.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -\vec{E}\vec{dl}$$

Or $\quad dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{gradV}.\vec{dl}$

D'où $\quad \vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \qquad (3.2)$

On dit que $\vec{E}$ dérive du potentiel V.

La relation vectorielle (3.2) est équivalente à :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_y = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques

Remarque

A l'aide des équations (2.24) et (3.2), on en déduit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad (3.3)$$

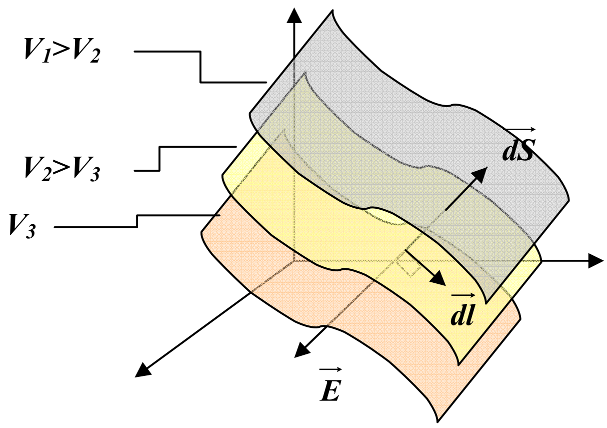
Dite équation de Laplace.

II.4- Surface équipotentielles.

Si l'on écrit $V(x,y,z)$ = constante, on peut en déduire une équation sous la forme $z = f(x,y)$ qui, dans le repère (X,Y,Z), serait une surface dont tous les points au même potentiel. On dit que c'est une **surface équipotentielle** ou encore une **surface de niveau**.

En fait il y a plusieurs surfaces de niveau. A chaque valeur de la constante correspond une surface.

Sachant que : $dV = \overrightarrow{gradV}.\vec{dl} = -\vec{E}.\vec{dl}$, alors $\vec{E} \perp \vec{dl}$ ($dV=0$). Le signe (-) montre que le champ se dirige vers les potentiels décroissants. Les lignes de champ sont donc toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

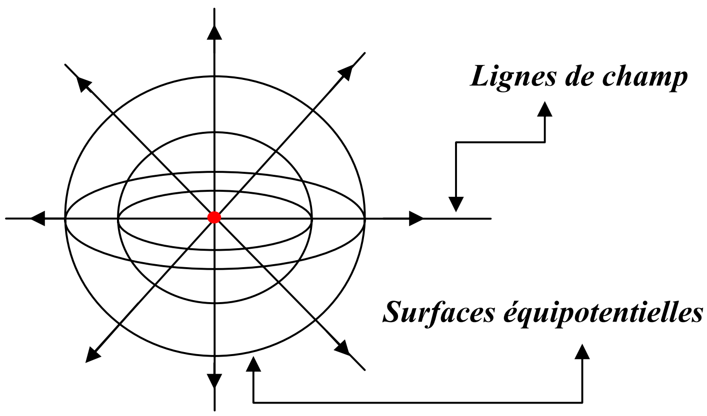


II.5- Application.

II.5.1- Cas d'une charge ponctuelle.

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

V= constante => r = constante
=> les surfaces équipotentielles seront des sphères de centre O (où est placée q) et de rayon r.



II.5.2- Cas de deux charges ponctuelles.

$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_A}-\frac{q}{r_B}\right]$ = Constante => $q\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$ = constante => les surfaces équipotentielles sont des surfaces de révolution autour de l'axe contenant les deux charges (voir dipôle électrique).

II.5.3- Etude du dipôle.

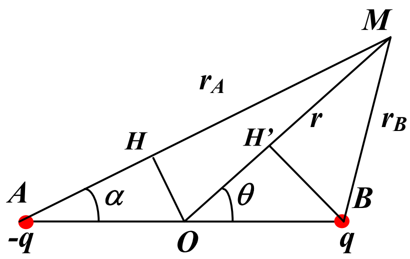
a- Définition.

Un dipôle est un ensemble de deux charges électriques ponctuelles $+q$ et $-q$ séparées par une distance ''a'' très petite devant $r = OM$ qui est la distance du dipôle au point d'observation M.

On appelle moment dipolaire du dipôle la grandeur : $\vec{P}=q\overrightarrow{AB}=qa\vec{i}$. P s'exprime en ***C.m***. Souvent on utilise le Debye : ***1 Debye*** = $\frac{1}{3}10^{-19}$ ***C.m***.

On distingue deux sortes de dipôles : le dipôle rigide pour lequel le moment P reste constant indépendamment du champ extérieur dans le quel il est plongé (les molécules polaires) et le moment non rigide pour lequel P varie sous l'action d'un champ extérieur (la molécule HCl).

b- Potentiel crée par le dipôle.



$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_A}-\frac{q}{r_B}\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_A-r_B}{r_Ar_B}$$

$$OM=r>>a \;\Rightarrow\; \theta\approx\alpha$$

$$\left| \begin{aligned} r_A &= AH+HM \\ &\approx \frac{a}{2}\cos\theta + r \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{aligned} r &= OH'+H'M \\ &\approx \frac{a}{2}\cos\theta + r_B \end{aligned} \right.$$

D'où :

$$\left| \begin{aligned} & r_A-r_B = a\cos\theta \\ & r_Ar_B = r^2 \end{aligned} \right.$$

Donc $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{a\cos\theta}{r^2}=\dfrac{\vec{P}\,\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Remarque :

Quand $\theta=\pi/2$, $M\in$ au plan médiateur de AB => $V=0$, c'est une surface équipotentielle particulière.

c- Champ crée par le dipôle.

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V \Leftrightarrow \begin{cases} E_r=-\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} \end{cases} \text{soit : } \begin{cases} E_r=\dfrac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & \textit{composante radiale} \\ E_\theta=\dfrac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & \textit{composante orthoradiale} \end{cases}$$

D'où :

$$E=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

Remarque : $tg\varphi=\dfrac{E_\theta}{E_r}=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta}$ => $tg\varphi=\dfrac{1}{2}tg\theta$

- Si $M\equiv M_1$, $\theta=0$ 1ère position de Gauss. $E_\theta=0$ et $E=E_r=\dfrac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.
- Si $M\equiv M_2$, $\theta=\pi/2$ 2ème position de Gauss. $E_r=0$ et $E=E_\theta=\dfrac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

- Si $M \equiv M_3$, $\theta = \pi$. $E_\theta = 0$ et $E = E_r = \dfrac{-2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.
- Si $M \equiv M_4$, $\theta = -\pi/2$. $E_r = 0$ et $E = E_\theta = \dfrac{-P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

d- Lignes de champ et Surfaces équipotentielles.

Lignes de champ :

Un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ sur une ligne de champ a pour composante :

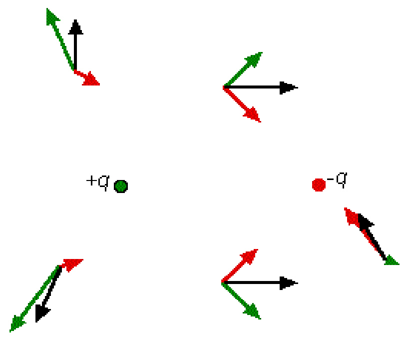
$$\vec{dl}\begin{cases} dr \\ rd\theta \end{cases} \text{ donc } tg\varphi = \frac{1}{2} tg\theta = \frac{rdr}{d\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \Rightarrow \ln r = 2 \ln \sin\theta + \ln k$$

Soit : $r = k \sin^2 \theta$

Surfaces équipotentielles :

$$V = cte \Rightarrow \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = cte \Rightarrow \frac{\cos\theta}{r^2} = cte \text{. Soit : } r^2 = k' \cos\theta.$$

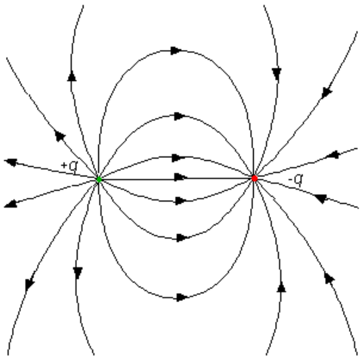
Avant de tracer les lignes de champ, il peut être utile de déterminer l'orientation du champ électrique résultant en quelques points de l'espace.

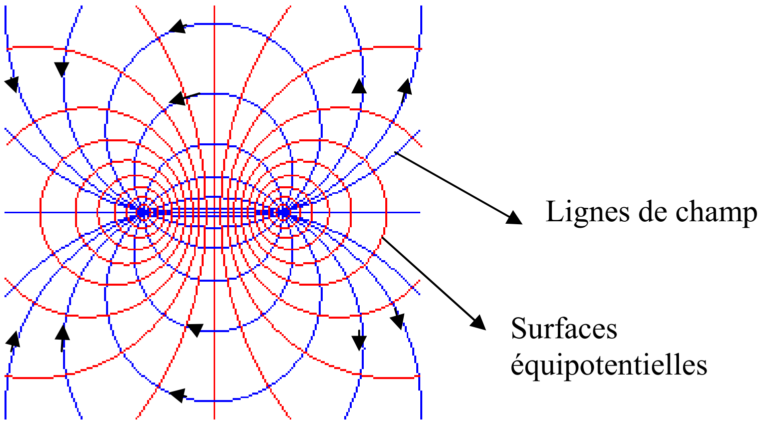


Vecteurs champ produits par la charge $+q$ (en vert), par la charge $-q$ (en rouge) et le champ résultant (en noir).

Lorsque l'orientation du champ résultant est connue pour plusieurs points de l'espace il est plus facile de tracer convenablement les lignes de champ électrique.

Le nombre de lignes de champ produites par la charge positive est le même que le nombre de lignes de champ absorbées par la charge négative. Les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.


+q
-q


Lignes de champ
Surfaces équipotentielles