Electrostatique

I- Force et Champ électrostatiques

I.1 Introduction.

L'électrostatique, est l'étude des interactions entre charges électriques maintenues fixes dans un repère donné (immobiles).

Pour évaluer les interactions entre charges, il est très commode d'introduire le concept de champ. Dans ce chapitre, nous allons introduire et étudier le champ électrostatique (on dit souvent le champ électrique) et les méthodes de le calculer quand c'est possible.

Quantification de la charge électrique.

C'est un fait expérimental que toutes les charges électriques isolables sont des multiples entiers d'une charge fondamentale, égale à la charge du proton. Il semble que tous les protons ont rigoureusement la même charge électrique, notée $q_p = 1,602.10^{-19}$ C (C : coulomb). Tous les électrons ont une charge égale à $-q_p$.

L'existence de charges positives et négatives correspond au fait que la force entre deux charges immobiles (que nous allons bientôt investiguer) peut être attractive ou répulsive. La force gravitationnelle, par contre, est toujours attractive, d'où le fait que toutes les masses sont positives.

Quoi qu'il en soit, les lois de l'électrostatique que nous allons développer sont indépendantes de la quantification de la charge. Les forces seront de nature électrostatique. On dit aussi force coulombienne.

Afin de faciliter la compréhension de certaines parties, dans la suite du cours, nous supposerons toujours que les charges sont positives (sauf quand c'est indiqué).

I.2 La loi de Coulomb.

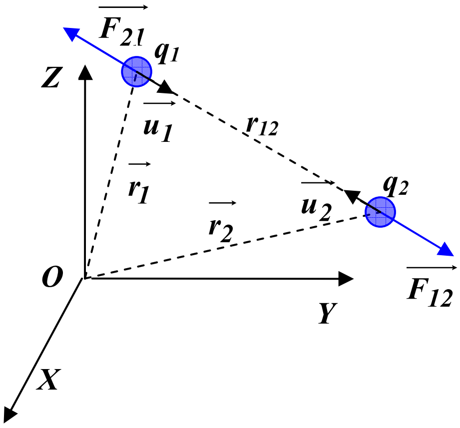
Soit deux charges ponctuelles immobiles q_1 et q_2. La force électrostatique existante entre les deux charges est attractive si les charges ont des signes opposés, et est répulsive si elles sont de même signe.
La force est proportionnelle au produit des charges, et inversement proportionnelle au carré de leur distance.

Explicitement, si $\vec{F}_{12}$ désigne la force exercée par q_1 sur q_2 et $\vec{F}_{21}$ la force exercée par q_2 sur q_1, alors :

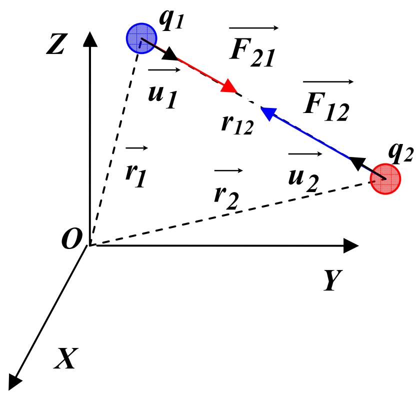
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} = -\vec{F}_{21} \qquad (2.1)$$

La constante $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ C^2\ s^2\ kg^{-1}\ m^{-3}$ est appelée permittivité du vide. On peut se rappeler qu'en unités internationales, $(4\pi\varepsilon_0)^{-1} = k = 9 \times 10^9$.

On peut trouver les valeurs précises des constantes physiques sur la page Web du National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html).



q_1 et q_2 de même signe



q_1 et q_2 de signe opposé

L'expression (2.1) peut aussi être écrite sous la forme :

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{12}\vec{u_1}}{r_{12}^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}^2}\vec{u_1} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}^2}\vec{u_2} = -\vec{F}_{21} \qquad (2.2)$$

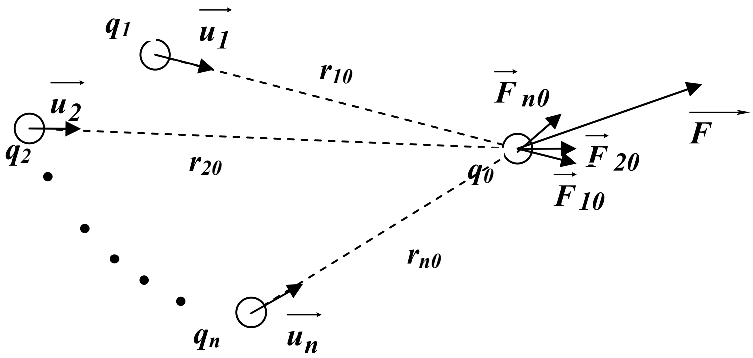
Remarques : - Dans l'expression (2.2) il faut tenir compte du signe de la charge.

- Le sens de la force électrostatique dépend du signe de la charge, alors que le sens des vecteurs unitaires $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ est toujours le même.

- La force électrostatique est très grande si on la compare à la force de gravitation. A titre d'exemple : Entre deux électrons qui se repoussent, le rapport entre la force électrostatique et la force de gravitation est de l'ordre de $F_{el}/F_g = 4\ 10^{42}$. La force de gravitation reste donc suffisamment négligeable devant F_{el}.

Théorème de superposition.

Soit q_0 une charge électrique située en un point M_0 de l'espace et soit $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des charges situées aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. On suppose, bien sûr, que les charges sont ponctuelles et immobiles. C'est un fait expérimental que la force totale exercée par les n charges sur q_0 est la résultante vectorielle des forces coulombiennes exercées par chacune des n charges. Ceci s'appelle le principe de superposition. Explicitement, si $\vec{F}$ désigne la force électrostatique totale exercée sur q, alors :



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{i0}^2}\vec{u_i} \qquad (2.3)$$

Où r_{i0} ($i = 1, 2, \ldots, n$) est la distance qui sépare la charge q_i de la charge q_o.

I.3 Champ électrique dans le vide.

Dans l'expression (2.3), on peut remarquer que la charge q_0 ne dépend pas de i. On peut la faire sortir à l'extérieur de Σ.

$$\vec{F} = q_0 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{i0}^2} \vec{u_i} \right] \qquad (2.4)$$

La quantité entre crochets est indépendante de la charge q_0. Elle ne dépend que des autres charges et de la distance M_0M_i. Cette quantité est appelée champ électrique :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{\left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|^3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{i0}^2} \vec{u_i} \qquad (2.5)$$

Il est crée au point M_0 par l'ensemble des charges immobiles q_1, q_2, …, q_n. Il est tel que, si l'on introduit une charge additionnelle q_0 au point M_0, la force électrostatique exercée sur q_0 est donnée par :

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \qquad (2.6)$$

Physiquement, les forces sont des quantités mesurables. A première vue, il peut sembler que le champ électrique n'a qu'une signification mathématique, en l'occurrence, un vecteur qui permet de calculer aisément les forces. Mais le champ électrique a deux autres caractéristiques importantes. D'une part, il sert à éliminer le concept d'action à distance. En effet, il peut être désagréable de penser que deux charges puissent s'influencer sans qu'il y ait rien entre elles. Dans ce contexte, le champ électrique est l'entité qui, de proche en proche, transmet l'interaction d'une charge à l'autre. La présence d'une charge modifie les propriétés de l'espace environnant, et l'espace ainsi modifié produit la force sur l'autre charge.

Le champ électrique à, d'autre part, véritablement une signification physique. Ceci est relié, entre autres, au fait qu'il possède de l'énergie et de l'impulsion, comme nous le verrons éventuellement. En fin, comme on a pu le constater, le champ électrique est inversement proportionnel à r^2 ; on dit qu'il est newtonien.

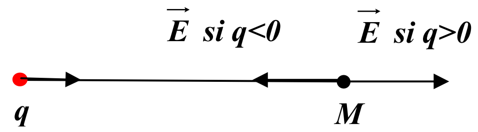
Important : *Le champ électrique crée par une charge existe en tout point **M** de l'espace alors que la force électrique n'existe que s'il y a aux moins deux charges.*

Cas particulier

1- champ crée par une seule charge ponctuelle

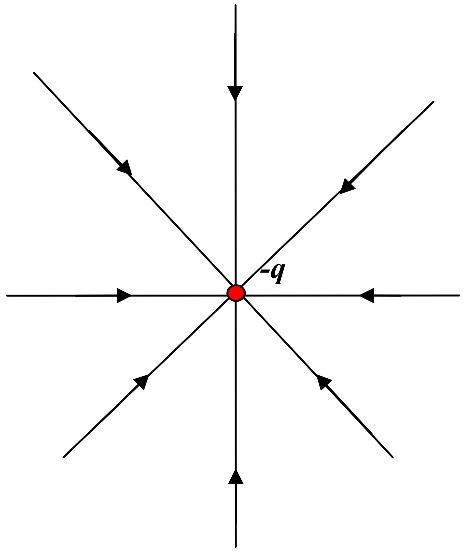
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$ Quand $q > 0$ $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et quand $q < 0$ $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de signe contraire.

On dit que le champ électrique fuit les charges positives et se dirige vers les charges négatives.

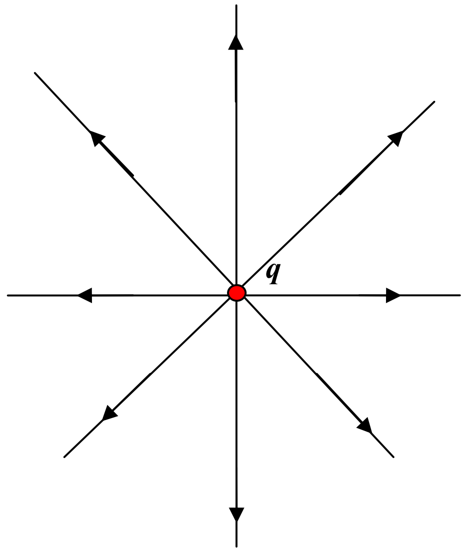


On appelle lignes de champ (on dit aussi ligne de force), l'ensemble des courbes qui sont constamment parallèles au champ. En d'autres termes c'est ''la trajectoire de $\vec{E}$ ''.

Dans le cas d'une seule charge les lignes de champ sont des droites qui se coupent au point où est placée la charge.



Cas d'une charge négative



Cas d'une charge positive

Le tracé des lignes de champ permet d'établir l'allure générale du champ électrique dans une région donnée de l'espace. La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point. Pour tracer convenablement les lignes de champ, certaines règles s'appliquent :

1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.

2. Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge $+2q$ produit deux fois plus de lignes qu'en absorbe une charge $-q$).

3. Les lignes de champ doivent respecter la symétrie de la distribution des charges.

4. Les lignes de champ ne doivent pas se croiser.

5. En s'éloignant de la distribution de charges, les lignes de champ semblent provenir d'une charge ponctuelle de valeur égale à la charge nette de la distribution.

I.3.1.Champ électrique crée par une distribution continue de charges.

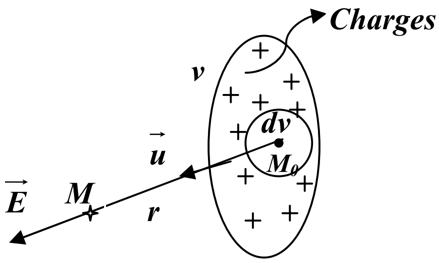
D'un point de vue microscopique, la charge électrique est portée par des particules élémentaires extrêmement petites. D'un point de vue macroscopique, cependant, on peut souvent considérer que la charge électrique est distribuée de façon continue. Ceci suppose que l'on se situe à des échelles beaucoup plus grandes que les dimensions des particules.

Donc, dans un espace donné une **distribution continue** de charge est un ensemble de charges ponctuelles supposées collées l'une à l'autre et le moindre espace vide entre deux charges voisines est inexistant.

Une distribution de charge continue peut être **volumique** (que l'on note souvent ρ), **surfacique** (σ) (on dit aussi superficielle) ou **linéique** (λ). Une distribution de charge peut être constante ou variable.

a- Distribution volumique.

Supposons qu'un volume quelconque ***v*** contient une distribution continue de charges. Soit ***dv*** un élément de volume autour d'un point M_0. Supposons que, ***dv*** soit petit par rapport aux distances macroscopiques, mais grand par rapport aux dimensions des particules. Soit ***dq*** la charge électrique élémentaire contenue dans ***dv***.



La densité volumique de charge au point ***M***, notée ρ, est définie comme :

ρ contient la charge ***dq***,

$$\rho = \frac{dq}{dv} \tag{2.7}$$

Le champ crée par ***dq*** au point ***M*** est :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} \tag{2.8}$$

Si maintenant on divise ***v*** en un ensemble de volumes très petits v_i ($i = 1$ --- > n) contenant chacun une charge élémentaire dq_i, le champ total crée au point ***M*** par toute ces charges (donc par une distribution discontinue de charge) serait :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dv_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i} \tag{2.9}$$

Où r_i est la distance entre la charge q_i (située au point M_{0i}) est le point ***M*** et $\overrightarrow{u_i}$ est le vecteur unitaire de la direction $M_{0i}M$.

Et si en plus on fait tendre ***n*** vers l'infini, la distribution discrète de charges va devenir une distribution continue et le champ serait :

$$\vec{E} = \iiint_v \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u} \qquad (2.10)$$

Notons qu'une intégrale vectorielle s'évalue composante par composante.

b- Distribution surfacique

Pour une distribution surfacique, le même résonnement nous conduit à :

$$\vec{E} = \iint_s \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u} \qquad (2.11)$$

c- Distribution linéique

Et en fin quand la distribution est linéique nous aurons :

$$\vec{E} = \int_l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma dl}{r^2} \vec{u} \qquad (2.12)$$

I.4 Théorème de Gauss.

I.4.1 Angle solide.

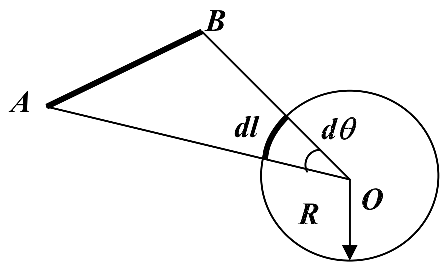
Essayons de comprendre la signification d'un angle dans le plan :

Selon le schéma ci-contre, $d\theta$ est l'angle sous lequel du point ***O*** on observe le segment [***AB***]. ***dl*** est l'arc découpé sur le cercle de rayon ***R*** par les segments [***OA***] et [***OB***].

$dl = R\, d\theta$.

Si $R = 1$ alors $dl = d\theta$ (θ en radian).

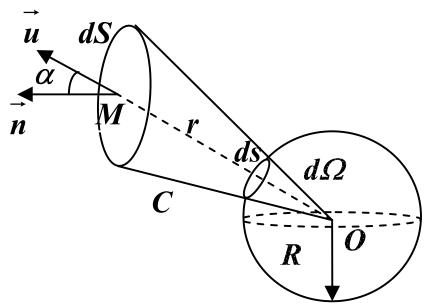
On peut dire qu'un angle en radian est la longueur de l'arc découpé sur le cercle de rayon 1 (une unité : 1 mètre, 1cm,...).



Cercle de rayon R = 1

L'angle sous le quel de ***O*** on observe tout le plan est le périmètre du cercle de rayon 1 c'est-à-dire $2\pi R = 2\pi$ radian.

Par analogie, un angle dans l'espace, est la surface (au lieu du périmètre) découpée sur la sphère (au lieu du cercle) de rayon 1. On l'appelle angle solide et on le note Ω. Ω est défini en stéradian (srd).



Sphère de rayon R = 1

dΩ est l'angle solide sous lequel du point ***O*** on observe la surface ***dS***. ***ds*** est la surface découpée sur la sphère de rayon 1 par le cône ***C***.

On montre que :

$$\frac{ds}{dS\cos\alpha} = \frac{R^2}{r^2}$$

Soit :

$$d\Omega = ds = \frac{R^2 dS\cos\alpha}{r^2}$$

Avec $R = 1$:

$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{dS\ \vec{n}\,\vec{u}}{r^2} = \frac{\overrightarrow{dS}\,\vec{u}}{r^2} \tag{2.13}$$

L'angle solide sous lequel on observe tout l'espace est la surface de la sphère de rayon 1 : $\Omega = 4\pi R^2 = 4\pi\, srd$.

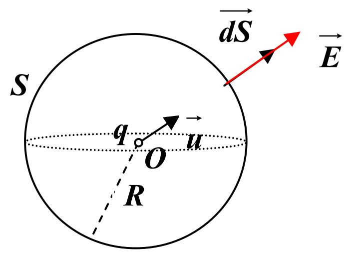
I.4.2 Flux du champ électrique.

a- Cas d'une seule charge

* **Flux de $\vec{E}$ à travers une sphère**.

On cherche le flux du champ électrique à travers une sphère (surface fermée) de centre ***O*** et de rayon ***R***. En tout point ***M*** de la surface de la sphère, nous avons :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\vec{u}$$



Et $$E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \tag{2.14}$$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires : $\vec{u}.\overrightarrow{dS} = u.dS = dS$

$d\Phi(\vec{E}/dS) = \vec{E}.\overrightarrow{dS}$ est le flux du champ à travers la surface élémentaire ***dS***. On dit que c'est un flux élémentaire.

Le flux est :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \int d\Phi(\vec{E}/dS) = \iint_S \vec{E}\ \overrightarrow{dS} = \iint_S E\ \vec{u}\ \overrightarrow{dS} = \iint_S E\ dS$$

Or, quelque soit le point ***M*** de la surface de la sphère, la distance ***OM*** est toujours égale à ***R***. Puisque $\vec{E}$ ne dépend que de ***R***, sa valeur sera la même partout sur ***S***; d'où :

$$\Phi(\vec{E}/S) = E\iint_S dS = E\,S = E\;4\pi R^2 \qquad (2.15)$$

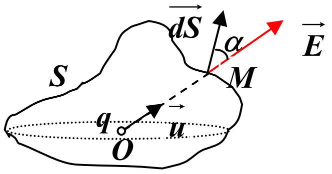
Des relations (2.14) et (2.15) on déduit :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (2.16)$$

Le flux du champ électrique à travers une sphère est indépendant de son rayon (donc de la sphère elle-même). Il ne dépend que de la charge qui crée le champ.

* **Flux de $\vec{E}$ à travers une surface quelconque**.

On cherche à calculer le flux du champ électrique à travers une surface quelconque ***S*** (surface fermée). En tout point ***M*** de la surface tel que ***OM = r***, nous avons :



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Et $$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (2.17)$$

Avec $\vec{u}.\vec{dS} = dS.\cos\alpha$

$d\Phi(\vec{E}/dS) = \vec{E}.\vec{dS}$ est le flux élémentaire du champ à travers la surface élémentaire ***dS***.

$$d\Phi(\vec{E}/dS) = \vec{E}\,\vec{dS} = E\,\vec{u}\,\vec{dS} = E\,dS\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS\cos\alpha$$

Le flux élémentaire peut être écrit sous la forme :

$$d\Phi(\vec{E}/dS) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\alpha}{r^2} \qquad (2.18)$$

$\dfrac{dS\cos\alpha}{r^2}$ est l'angle solide sous lequel du point ***O***, on observe ***dS***; soit :

$$d\Phi(\vec{E}/dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d\Omega}{4\pi}$$

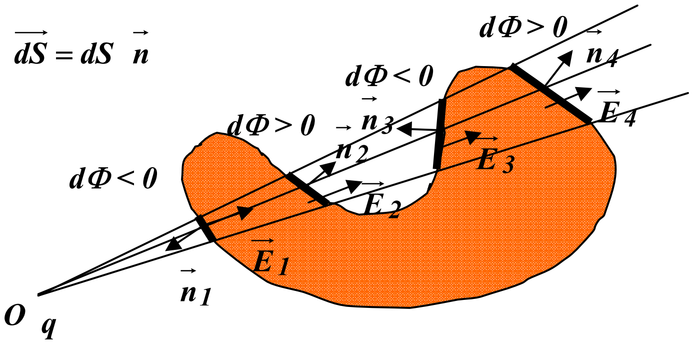
D'où :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \int d\Phi(\vec{E}/dS) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (2.19)$$

*Le flux du champ électrique est indépendant de la surface choisie (sphère, surface quelconque, ...etc.). Il ne dépend que de la charge (**q**) et du milieu (ici le vide : ε_0).*

Remarques :

- Quand la charge q est à l'extérieur de S, le nombre de surfaces élémentaires dS découpées par l'angle solide $d\Omega$ sur S est obligatoirement pair : donc $d\Phi$ total est nul => $\Phi = 0$.

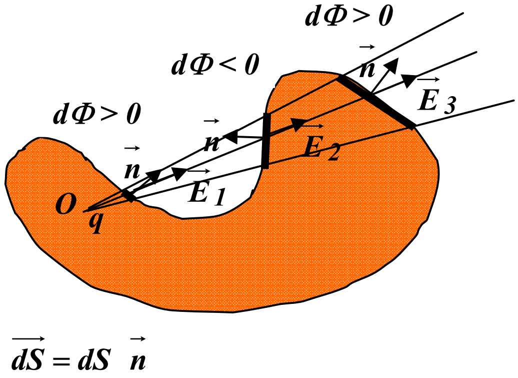


- Quand q est à l'intérieur de S, le nombre de surfaces élémentaires dS découpées par l'angle solide $d\Omega$ sur S est obligatoirement impair et en plus $d\Phi$ garde la même valeur :

$$d\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega_{total}}{4\pi}$$

avec $\Omega_{total} = 4\pi$ donc :

$$\Phi(\vec{E}\,/\,dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



En résumé, chaque fois que la charge se trouve dans la surface fermée, le flux est non nul et chaque fois qu'elle est à l'extérieur de la surface fermée, le flux est nul.

I.4.3 Théorème de Gauss.

Dans le cas de plusieurs charges distribuées dans l'espace, le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est la somme algébrique des flux envoyés par chacune des charges (principe de superposition).

$$\Phi(\vec{E}\,/\,S) = \oint\!\!\oint_{S\ fermée} \vec{E}\ \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{intérieures} \tag{2.20}$$

$q_{intérieures}$ désigne la charge totale contenue dans la surface fermée S. Les charges qui sont à l'extérieur de S envoient un flux nul

Dans le cas d'une distribution continue, le théorème de Gauss prend la forme :

- distribution volumique :

$$\oint\!\!\oint_{S\ fermée} \vec{E}\ \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV \tag{2.21}$$

V : volume chargé contenu dans la surface fermée S.

- distribution superficielle

$$\oint\!\!\oint_{S\ fermée} \vec{E}\ \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\Sigma \sigma\, d\Sigma \tag{2.22}$$

S : surface chargée contenu dans la surface fermée S.

- distribution linéique

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_l \lambda dl \qquad (2.23)$$

$\boldsymbol{l}$: longueur chargée contenu dans la surface fermée $\boldsymbol{S}$.

<u>Remarque</u> :

Dans le cas d'une distribution volumique, on peut utiliser le théorème d'Ostrogradski pour convertir l'intégrale double en une intégrale triple :

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\,\vec{dS} = \iiint_V div\vec{E}\,dV \qquad \text{Avec} \qquad \oiint_{S\ fermée} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,dV\ .$$

Il s'ensuit que :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.24)$$

L'expression (2.24) est dite <u>forme locale du théorème de Gauss</u>. On l'appelle équation de Poisson.

S'il y a absence de charge dans le volume V, $\rho = 0$ et donc $div\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{E}\vec{dS} = 0$, on dit que le champ électrique est à flux conservatif. C'est-à-dire que le flux total reste nul.

<u>Explication</u> :

Soit $\boldsymbol{S}$ une surface fermée formée par : un tube de force + s_1 + s_2. Le flux de $\vec{E}$ à travers $\boldsymbol{S}$ est :

$$\Phi(\vec{E}/S) = 0 = \Phi(\vec{E}/tube\ de\ force) + \Phi(\vec{E}/s_1) + \Phi(\vec{E}/s_2)$$

$\vec{E}$ tangent aux lignes de champ : $\Phi(\vec{E}/tube\ de\ force) = 0$ donc $\Phi(\vec{E}/s_1) = -\Phi(\vec{E}/s_2)$.

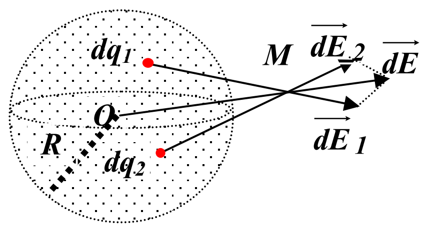
Le flux entrant dans la surface $\boldsymbol{S}$ est égal aux flux sortant de cette surface, c'est pour cette raison qu'on dit que le flux est conservatif.

Remarque : *Un tube de force est une surface cylindrique latérale formée par les lignes de champ.*

I.5 Application : calcul de E par le théorème de Gauss.

I.5.1 Champ crée par une sphère chargée avec ρ uniforme.

dq_1 et dq_2 symétriques par rapport au plan diamétral passant par $OM = r$.



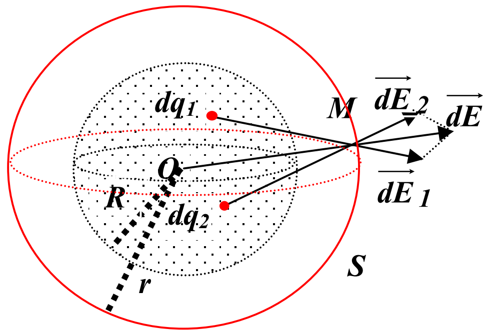
$$\left.\begin{array}{ll} dE_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq_1}{r_1^2} & r_1 = r_2 \\ dE_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq_1}{r_2^2} & dq_1 = dq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad dE_1 = dE_2$$

$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2$ a donc la même direction que $\boldsymbol{r}$. On dit qu'il est porté par r. Il admet donc une seule composante qui est la composante radiale. On dit que le champ est radial.

Le volume de la sphère peut être divisé en un ensemble de charges ponctuelles symétriques deux à deux. Chaque couple de charges va crée un champ élémentaire radial $\overrightarrow{dE}$. Le champ résultant, crée par l'ensemble des charges de la sphère sera donc radial.

De plus, quelque soit M, tant que OM reste égal à r, le champ va garder le même module. L'ensemble des points tels que r = constante est une sphère S de centre O et de rayon r.

D'où :



$$\Phi(\vec{E}/S) = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$$

$$\vec{E} \,//\, \overrightarrow{dS} \quad \Rightarrow \quad \oint\!\!\oint_S E dS = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint_V dV$$

$$E \text{ uniforme} \quad \Rightarrow \quad E\oint\!\!\oint_S dS = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint_V dV$$

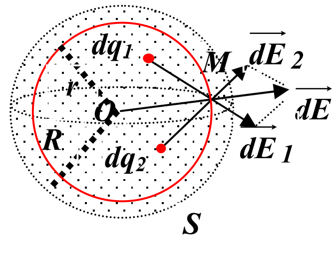
$$\Rightarrow \qquad E\ S = \frac{\rho}{\varepsilon_0} V$$

Avec $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ nous aurons : $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

Remarque : S est la surface fermée à travers laquelle nous avons calculé le flux de E. S est une surface fictive. Elle n'existe pas réellement, nous l'avons inventé pour les calculs. On l'appelle aussi la surface de Gauss.

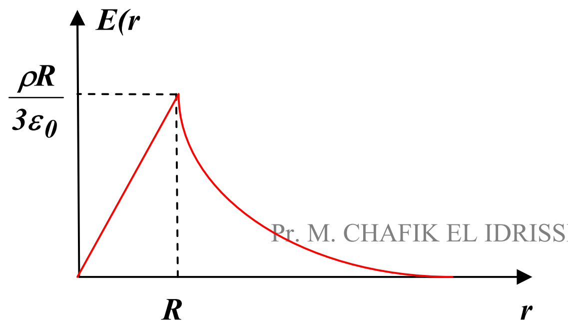
V est le volume chargé qui se trouve dans la surface fermée. Ne l'oublions pas, seules les charges à l'intérieur de la surface fermée auront un flux non nul.

Un autre cas s'impose c'est lorsque r est inférieur à R. C'est-à-dire quand le point M, où l'on veut calculer le champ se trouve dans la sphère chargée. Dans ce cas la surface fermée va être elle aussi dans la sphère chargée. Le même raisonnement nous conduit alors à :



$$E\ S = \frac{\rho}{\varepsilon_0} V$$

Avec $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Les charges à l'extérieur de S ont un flux nul et ne doivent pas



être prises en compte dans le calcul de V. Ce ci nous conduit à : $E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$

On peut tracer les variations de E quand M varie dans l'espace, c'est-à-dire quand r varie. Il s'agit de tracer les variations de la fonction :

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad \text{si } r > R$$

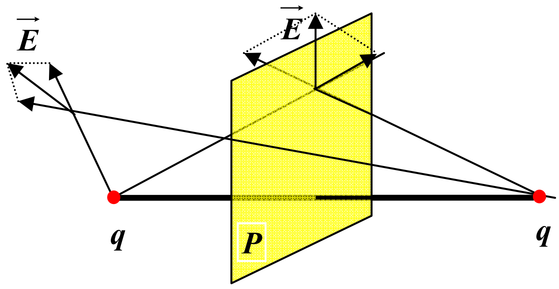
$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad \text{si } r < R$$

On remarque que lorsque le point M est sur la surface de la sphère chargée, E vérifie : $\underset{r \to R^+}{E(r)} = \underset{r \to R^-}{E(r)} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$. Le champ est une fonction continue.

I.5.2 Etude des symétries

- Cas de deux charges ponctuelles identiques.

Si $M \in$ au plan de symétrie P, $\vec{E}$ est porté par ce plan. Si $M \notin$ au plan de symétrie, la direction de $\vec{E}$ change selon la position de M.



- Cas d'une distribution quelconque présentant un plan de symétrie (figure a).

Si $M \in$ au plan de symétrie, $\vec{E}$ est porté par ce plan. Si $M \notin$ au plan de symétrie, la direction de $\vec{E}$ change selon la position de M.

- Cas d'une distribution quelconque présentant deux plans de symétrie (figure b).

Si $M \in P_1$, $\vec{E}$ est dans P_1.

Si $M \in P_2$, $\vec{E}$ est dans P_2.

Si $M \in \Delta = P_1 \cap P_2$, $\vec{E}$ est porté par Δ. ==> Δ est une ligne de force.

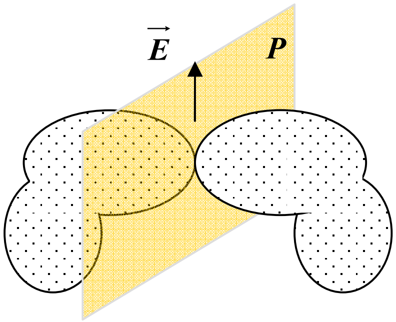


Figure a

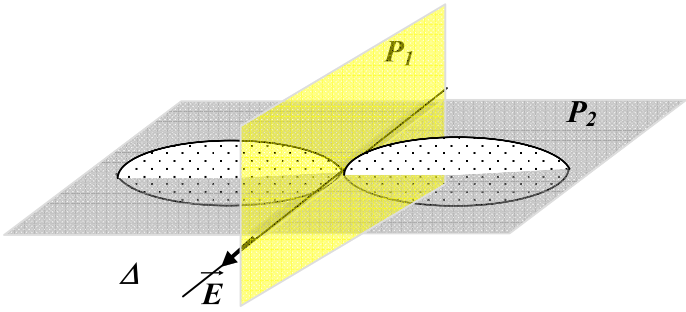


Figure b

Exemple :

* Sphère chargée (distribution de charge uniforme):

Il existe une infinité de plans diamétraux passant par ***OM*** (figure c). Ces plans se coupent selon la direction ***OM*** ==> *OM* ligne de champ.

* Plan chargé (distribution de charge uniforme):

Il existe une infinité de plans passant par ***HM*** et perpendiculaires au plan (figure d). Ces plans se coupent selon la direction ***HM*** ==> ***HM*** ligne de champ.

* Cylindre infini chargé (distribution de charge uniforme) :

$\Delta = P_1 \cap P_2 =$ ligne de champ (figure f).

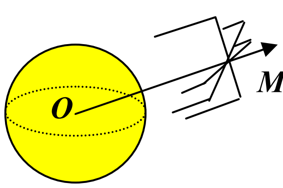


Figure c

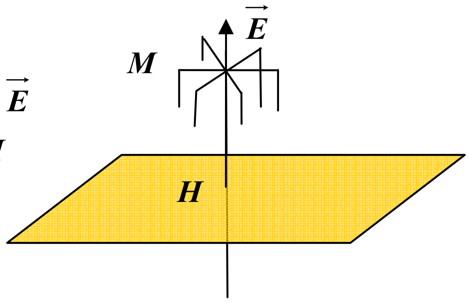


Figure d

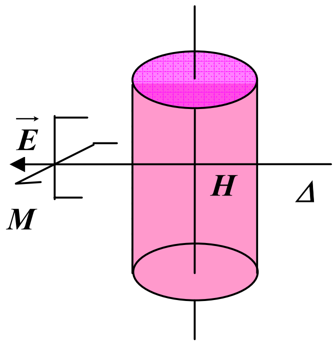


Figure f

II. Potentiel électrique dans le vide

II.1 Introduction.