Electrocinétique

I. Généralités – Loi d'Ohm.

I.1. Courant électrique.

Chaque fois qu'il y a mouvement d'un grand nombre de charges électriques, on dit qu'il y a courant électrique. La quantité de charge qui traverse une section d'un conducteur par unité de temps est appelée courant électrique : $i = \frac{dq}{dt}$. i s'exprime en Ampère (A).

Si i est constant dans le temps => $Q = i\,t$; soit $i = \frac{Q}{t}$. On le note dans ce cas I. On dit qu'il s'agit d'un régime continu ou permanent ou stationnaire. Toutes les grandeurs sont indépendantes du temps dans ce cas. Par convention le sens positives du courant est celui de déplacement des charges (+).

I.2. Densité de courant.

Soit une portion d'un conducteur de section dS et de longueur dl. Pendant dt, une charge q, ayant une vitesse v, traversera la distance dl.

Nous aurons : $\overrightarrow{dl} = \vec{v}\,dt$

Le volume traversé par la charge est alors :

$$d\tau = \overrightarrow{dl}\,\overrightarrow{dS} = \vec{v}\,\overrightarrow{dS}\,dt$$

Si N est le nombre de charges mobiles par unité de volume, $\rho = N.e$ ($e = 1.6\ 10^{-19}\ C$) sera la quantité de charges par unité de volume. C'est donc la densité volumique de charge. De plus dans $d\tau$ nous avons la charge :

$$\rho\,d\tau = N\,e\,d\tau = N\,e\,\vec{v}\,\overrightarrow{dS}\,dt$$

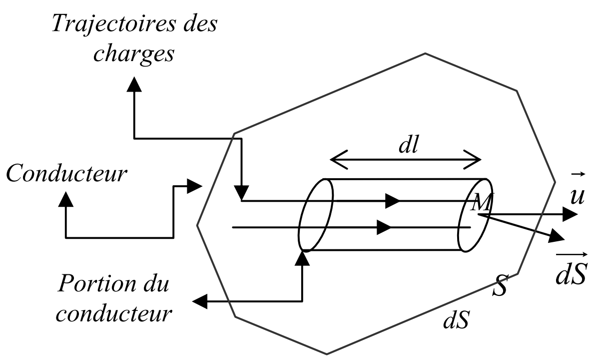
Soit dq cette charge :

$$dq = N\,e\,\vec{v}\,\overrightarrow{dS}\,dt$$

$$\frac{dq}{dt} = N\,e\,\vec{v}\,\overrightarrow{dS}$$

On pose : $\vec{J} = N\,e\,\vec{v}$

=> $i = \frac{dq}{dt} = \vec{J}\,\overrightarrow{dS}$ est le courant qui traverse la section dS. Le courant traversant toute la section S est :



$$\boxed{i = \iint_S \vec{J}\,\overrightarrow{dS}} \qquad (5.1)$$

$\vec{J}$ est appelée densité de courant. C'est une grandeur vectorielle, elle s'exprime en $A.m^{-2}$. $\vec{J}$ est colinéaire avec la vitesse des charges mobiles. Les courbes tangentes à $\vec{\boldsymbol{J}}$ sont appelées lignes de courant. Ce sont les trajectoires des charges.

<u>Flux de *J* à travers une surface fermée</u>

Soit Σ une surface fermée dans un conducteur. Supposons que les charges quittent Σ. Pendant dt le nombre de charges qui restent dans Σ diminue ; c'est-à-dire $dq < 0$.

Or $\dfrac{dq}{dt} = \iint_\Sigma \vec{J}\,\overrightarrow{dS}$ et $\vec{J}\,\overrightarrow{dS} > 0$ => uniquement ici, nous allons ajouter un signe (-) dans l'un des membres de cette équation => $-\dfrac{dq}{dt} = \iint_\Sigma \vec{J}\,\overrightarrow{dS}$ = courant qui sort de Σ.

De plus si ρ est la densité de charges mobiles $q = \iiint_V \rho dV$ => $\dfrac{dq}{dt} = \iiint_V \dfrac{d\rho}{dt} dV$; V est le volume dans Σ. D'où $\iint_\Sigma \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = -\iiint_V \dfrac{d\rho}{dt} dV$

Or d'après le théorème d'Ostrogradski appliqué à $\vec{J}$ donne : $\iint_\Sigma \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = -\iiint_V div\vec{J}\, dV$.

On en déduit que $\iiint_V div\vec{J}\, dV = -\iiint_V \dfrac{d\rho}{dt} dV$ => $\boxed{div\vec{J} + \dfrac{d\rho}{dt} = 0}$ (5.2)

La relation (5.2) est valable pour tout fluide qui coule. Si ρ est une constante indépendante de temps : $div\vec{J} = 0$ => $\iint_\Sigma \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = 0$ => $\vec{J}$ est à flux conservatif.

<u>Conséquence</u>

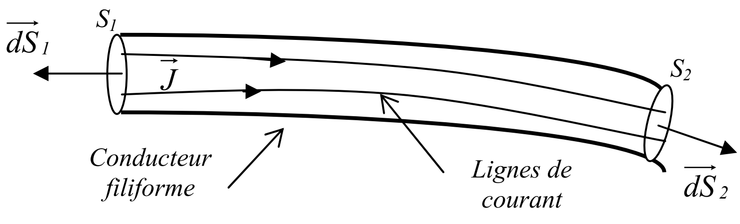
Soit un conducteur filiforme (a la forme d'un fil) et soit $\Sigma = S_1 + S_2 + surface\ latérale$. Nous avons :

$$\iint_\Sigma \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} \vec{J}\,\overrightarrow{dS_2} + \iint_{S_2} \vec{J}\,\overrightarrow{dS_2} + 0 = 0$$

$$\iint_\Sigma \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = -i_1 + i_2 = 0 \quad =>$$

$i_1 = i_2$

Le courant qui entre dans S_1 est le même que celui qui sort de S_2.



I.3. Loi d'Ohm.

<u>a- Loi d'Ohm locale</u>

Dans un conducteur les charges mobiles sont des électrons. Ces charges sont animées d'une vitesse $\vec{v}$ et donc soumises à une force électrique $\vec{f}_e = e\vec{E}$ et une force de frottement

$\vec{f}_r = -a\,\vec{v}$ (a : coefficient de frottement) => $\vec{f}_r + \vec{f}_e = m\vec{\gamma}$. A vitesse constante : $\vec{f}_r + \vec{f}_e = \vec{0}$ => $a\vec{v} = e\,\vec{E}$. On pose $\mu = \dfrac{e}{a}$ => $\vec{v} = \mu\,\vec{E}$. μ est appelée mobilité des charges. Moins il y a de frottement (a faible) plus les charges sont mobiles (μ grand). Or nous avons vu que $\vec{J} = N\,e\,\vec{v}$ => $\vec{J} = N\,e\mu\,\vec{E}$. On pose $\gamma = Ne\mu$ => $\vec{J} = \gamma\,\vec{E}$. γ est la conductivité de la substance conductrice. Plus les charges sont mobiles (μ grand) et plus le matériau est conducteur. Pour un conducteur parfait $\gamma = \infty$ et pour un isolant parfait $\gamma = 0$. On préfère utiliser $\rho = \dfrac{1}{\gamma}$ qui est la résistivité de la substance conductrice. Pour un conducteur parfait $\rho = 0$ et pour un isolant parfait $\rho = \infty$. D'où :

$$\boxed{\vec{E} = \rho\vec{J}} \qquad (5.3)$$

C'est la loi d'ohm locale. On dit aussi la loi d'Ohm microscopique

<u>Conséquence</u>

Régime permanent $div\vec{J} = 0$ => $\gamma\,div\vec{E} = 0$ => $div\vec{E} = 0$. Or d'après la loi de poisson $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ => $\rho = 0$. Pendant un temps donné, Dans un volume du conducteur, ils entrent autant de charges qu'ils en sortent : la variation de la charge totale dans le volume reste nulle.

<u>b- Résistance électrique</u>

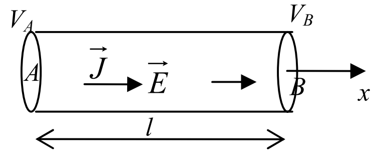
- <u>Définition</u>

Soit un conducteur homogène et filiforme. Supposons $\vec{J}$ uniforme sur une section.

$$I = \iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS} = J\,S \;\Rightarrow\; J = \frac{I}{S} = \gamma\,E = -\gamma\frac{dV}{dx} \;\Rightarrow\; -\,dV = \frac{1}{\gamma}Jdx = \frac{1}{\gamma}\frac{I}{S}dx$$

Entre A et B, nous aurons ($V_A > V_B$):

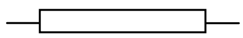
$$V_A - V_B = \frac{1}{\gamma}\frac{I}{S}l$$
$$= \rho\frac{l}{S}I$$



On pose $R_{AB} = \rho\dfrac{l}{S}$ appelée résistance électrique du conducteur entre les points A et B. La résistance ne dépend que de la résistivité (donc de la nature du conducteur) et des dimensions du conducteur.

$$V_A - V_B = R_{AB}I \qquad (5.4)$$

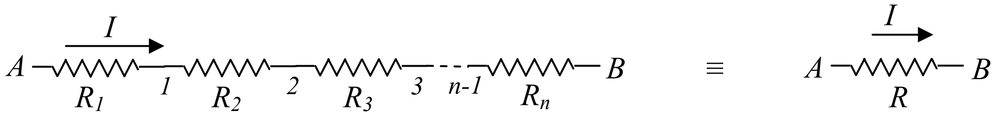
C'est la loi d'Ohm. La résistance s'exprime en Ohm (Ω).
Une résistance est symbolisée par :

 ou 

Remarque importante

Le passage d'un courant dans une résistance est le siège d'une perte d'énergie par collision et frottement entre les charges mobiles et les atomes fixes du conducteur. Ce phénomène est appelé ***effet Joule****.*

- Résistances en série



$V_A - V_1 = R_1 I$, $V_1 - V_2 = R_2 I$, $V_2 - V_3 = R_3 I$, …, $V_{n-1} - V_B = R_n I$. D'une part En faisant la somme membre à membre, nous obtenons : $V_A - V_B = (R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n) I$ et d'autre part nous avons : $V_A - V_B = R I$. Dou :

$$R = \sum_{i=1}^{n} Ri \qquad (5.5)$$

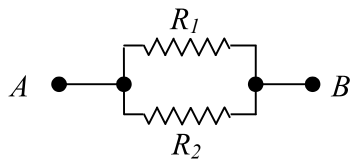
- Résistances en parallèle

D'un coté $V_A - V_B = R_1 I = R_2 I = R_3 I = ... = R_n I$ et de l'autre coté $V_A - V_B = R I$. Ici le courant I se divise entre les résistances : $I = I_1 + I_2 + I_3 = ... = I_n$

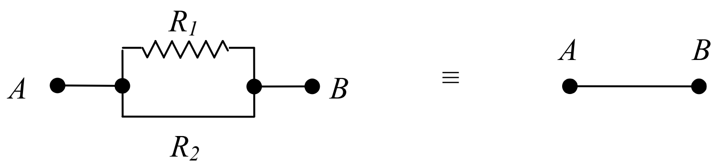
$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

- Résistance nulle et résistance infinie

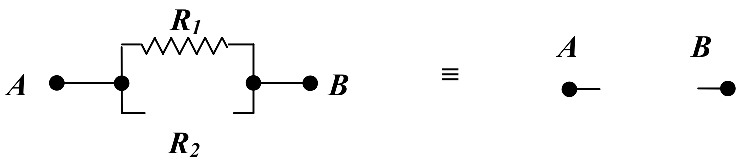
Soient deux résistances R_1 et R_2 en parallèles. La résistance équivalente est $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.



Si $R_2 = 0$ alors $R = 0 \Rightarrow V_A - V_B = R_2 I_2 = 0 \Rightarrow V_A = V_B \Rightarrow$ une résistance nulle est équivalente à un fil. Tous les points d'un fil ont le même potentiel. On dit que R_1 est court – circuitée.



Si $R_2 = \infty \Rightarrow R = R_1 \Rightarrow$ comme si R_2 n'existe pas entre les bornes A et B. Une résistance infinie est un circuit ouvert.



I.4. Loi de Joule.

Un conducteur parcouru par une charge dq entre deux de ses points A et B est le siège d'une énergie $dW = dq\ (V_A - V_B)$ soit $dW = (V_A - V_B)\ I\ dt$ qui est l'énergie du conducteur quand il est parcouru par un courant I pendant dt. Pendant le temps t, nous aurons $W = (V_A - V_B)\ I\ t$ avec I circulant de A vers B. On peut aussi écrire $W = R\ I^2\ t$

Si $V_A > V_B$ alors $W > 0$, on dit que le conducteur est un récepteur.

Si $V_A < V_B$ alors $W < 0$, on dit que le conducteur est un générateur.

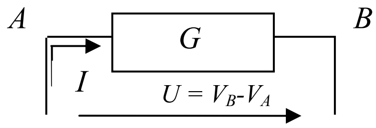
La puissance du conducteur sera : $P = \frac{W}{t} = RI^2 = (V_A - V_B)I$ qui est une grandeur indépendante du temps.

II. Loi d'Ohm généralisée

II.1. Générateur.

$V_A < V_B$

$U = V_B - V_A > 0$

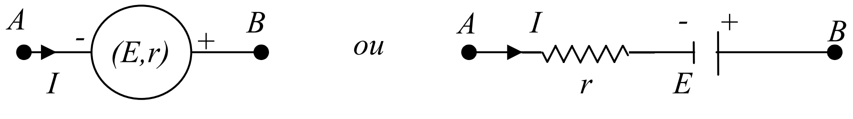


On rappelle que les charges mobiles (+) se déplacent du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé. Malgré que $V_A < V_B$ le courant dans G va de A vers B ce qui est en contradiction avec le sens de déplacement des charges. Le rôle de G est alors de donner suffisamment d'énergie aux charges pour qu'elles remontent le potentiel. On dit que G est un générateur. Un générateur produit de l'énergie. L'énergie produite est la somme de l'énergie perdue par effet Joule et de l'énergie utilisée dans le circuit extérieur. On écrit

$$W = \underbrace{r\ I^2\ t}_{\text{perdue par effet joule}} + \underbrace{(V_B - V_A)\ I\ t}_{\text{utilisée par le circuit extérieur}}$$

$P = r\ I^2 + U\ I = (r\ I + U)\ I = E\ I$ avec $E = r\ I + U$. E est la force électromotrice (*f.e.m.*) du générateur et r est sa résistance interne. C'est la tension aux bornes de G quand $I = 0$. Autrement dit E est la tension que l'on mesure aux bornes du générateur quant il n'est branché à aucun circuit.

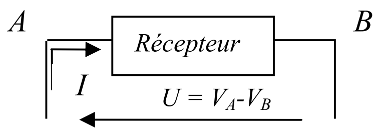
On représente un générateur par :



III.2. Récepteur.

$V_A > V_B$

$U = V_A - V_B > 0$

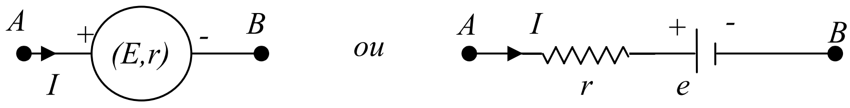


Le courant dans le récepteur va de A vers B ce qui est conforme avec le sens de déplacement des charges. Un récepteur reçoit de l'énergie. L'énergie reçue est la somme de l'énergie perdue par effet Joule dans la résistance interne r et de l'énergie utilisée pour charger le récepteur. On écrit

$$W = U\ I\ t = \underbrace{r\ I^2\ t}_{perdue\ par\ effet\ joule} + \underbrace{e\ I\ t}_{utilisée\ pour\ charger\ le\ récepteur}$$

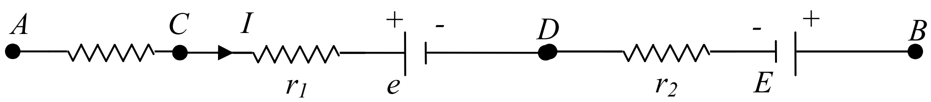
$U = r\ I + e$. e est dite la force contre électromotrice (*f.c.e.m.*) du récepteur et r est sa résistance interne. C'est la tension aux bornes du récepteur quand $I = 0$. Autrement dit e est la tension que l'on mesure aux bornes du récepteur quant il n'est branché à aucun circuit.

On représente un récepteur par :



II.3. Loi d'Ohm généralisée.

Soit une portion AB d'un circuit.



- Si AB est une résistance :

$V_A > V_B$ et $V_A - V_B = R\ I$

- Si AB est un générateur :

$V_A < V_B$ et $V_A - V_B = r\ I - E$

- Si AB est un récepteur :

$V_A > V_B$ et $V_A - V_B = r\ I + e$

- Si AB est l'ensemble résistance, récepteur et générateur:

$V_A > V_B$ et $V_A - V_B = V_A - V_C + V_C - V_D + V_D - V_B = R\ I + r_1\ I + e + r_2\ I - E$

Soit : $V_A - V_B = (R + r_1 + r_2)I - (-e + E)$

Que l'on écrit sous la forme : $V_A - V_B = (R + r_1 + r_2)\ I - (e + E)$ avec $e < 0$.

Ou encore :

$$V_A - V_B = I\ \Sigma R - \Sigma E \qquad (5.6)$$

Avec la convention de signe : E est positif pour un générateur et négatif pour un récepteur. L'expression (5.5) est dite loi d'Ohm généralisée. La convention de signe peut être utilisée de la façon suivante : ΣE = somme des *f.e.m.* et *f.c.e.m.* affectées du signe de la borne par où sort le courant.

III. Etude des réseaux

III.1. Définitions.

On appelle :

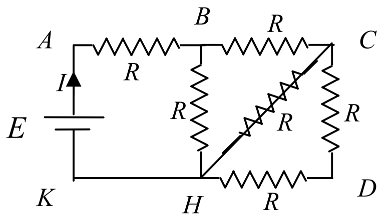
Réseau : Ensemble d'éléments (résistances, générateurs, récepteurs, …) formant un circuit électrique fermé et indépendant.

Nœud : Un point du réseau ou arrivant au moins trois éléments.

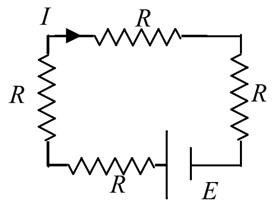
Branche : Toute partie comprise entre deux nœuds.

Maille : Ensemble de branches formant une boucle fermée. Quand toutes les branches sont parcourues par le même courant on dit que la maille est sans dérivation ; dans le cas contraire la maille est avec dérivation.

Exemple :



Circuit 1



Circuit 2

Le circuit 1 contient : $n = 4$ nœuds, $b = 5$ branches, plusieurs mailles avec dérivation et aucune mailles sans dérivation.

Le circuit 2 est un circuit simple, il ne contient aucun nœud. C'est une maille sans dérivation (tout le circuit est parcouru par le même courant).

En régime permanent, le problème est de calculer l'intensité du courant dans chaque branche et la différence de potentiel aux bornes de chaque élément d'un réseau. Pour cela on utilise certaines lois et théorèmes que nous allons étudier dans la suite.

III.2. Loi de Pouillet.

- Cas d'un circuit simple

$V_B - V_A = E - r\,I$

$V_B - V_A = R\,I$

$\Rightarrow E - r\,I = R\,I$

Soit : $E = (R + r)\,I$

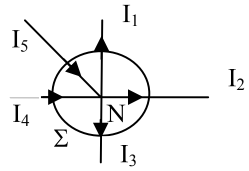
- Cas général

Soit un circuit fermé sans dérivation et comportant plusieurs fem et fcem. La loi d'Ohm généralisée : $V_A - V_B = \Sigma I\,R - \Sigma E$ nous permet d'écrire, quand $V_A = V_B$, $\Sigma E = \Sigma I\,R$. Sachant que tout le circuit est parcouru par le même courant (maille simple sans dérivation), nous aurons :

$$\Sigma E = I\,\Sigma R \qquad (5.6)$$

C'est la loi de Pouillet ; valable pour un circuit simple contenant une seule maille sans dérivation. On doit l'appliquer avec la même convention de signe vue précédemment.

III.3. Lois de Kirchhoff.



a- Première loi de Kirchhoff

On l'appelle aussi la loi aux nœuds. Soit le nœud N suivant :

Et soit S une surface fermée autour de N. Nous avons vu que le flux de $\vec{J}$ est conservatif =>

$\iint_{\Sigma} \vec{J}\,\overrightarrow{dS} = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$

La somme des courant entrant vers le nœud = somme des courants sortant. Soit :

$$\sum I_{entrant} = \sum I_{sortant} \qquad (5.7)$$

Important

Pour un réseau à n nœud, on peut avoir (n-1) équations indépendantes.

b- Deuxième loi de Kirchhoff

On l'appelle aussi la loi aux mailles. On utilise la loi d'Ohm généralisée pour une maille avec dérivation donc des courants différents pour chaque branche : $V_A - V_B = \Sigma I R - \Sigma E$ avec $V_A = V_B$ =>

$$\Sigma E = \Sigma I R \qquad (5.8)$$

On doit appliquer la deuxième loi de Kirchhoff avec la même convention de signe vue précédemment.

Pour un réseau contenant n nœuds et b branches nous aurons $(b-(n-1))$ équations indépendantes.

Ainsi avec les deux lois nous aurons $(n-1) + (b-(n-1)) = b$ équations indépendantes.

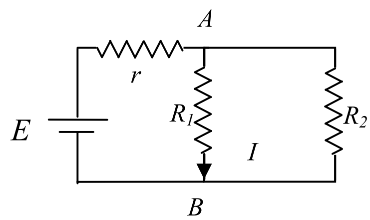
III. 4. Théorème de Thévenin.

Un réseau vu de l'extérieur entre deux de ses bornes A et B est équivalent à un générateur de fem E_{th} et de résistance interne R_{th}.

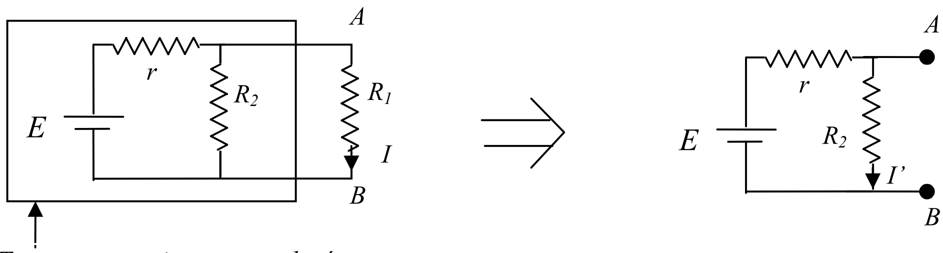
Pour calculer E_{th} et R_{th}, on débranche le circuit extérieur vu entre A et B, E_{th} est alors la d. d. P. entre ces deux points et R_{th} est la résistance équivalente vue toujours entre A et B.

Exemple

On souhaite calculer, à l'aide du théorème de Thévenin, le courant ***I*** de la branche ***AB*** du circuit suivant :



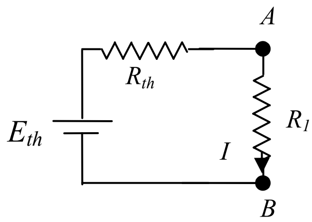
On commence par débrancher la branche parcourue par le courant que l'on veut calculer :



Toute cette partie sera remplacée par un seul générateur

$$E_{th} = V_A - V_B = \frac{R_2 E}{r + R_2} \quad \text{et} \quad R_{th} = r\,//\,R_2 = \frac{rR_2}{r + R_2}$$

Le circuit de départ serait alors équivalent à :



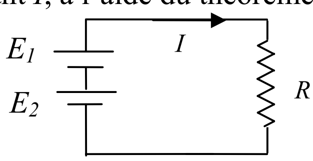
Tout le circuit est alors ramené à un circuit simple avec une seule maille sans dérivation. On utilise la loi de Pouillet : $E_{th} = (R_{th} + R_1)\, I$. Dou : $I = \dfrac{E_{th}}{R_{th} + R_1}$

III.5. Théorème de superposition.

La superposition de plusieurs régimes permanents est un régime permanent.

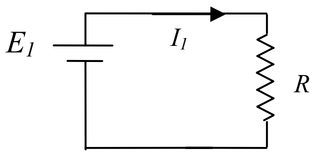
<u>Exemple</u>

Nous allons calculer le courant I, à l'aide du théorème de superposition du circuit suivant :



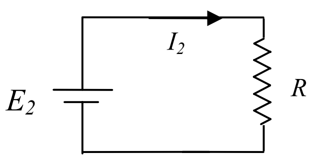
Le courant I est débité par les deux générateurs E_1 et E_2.

1^er^ régime permanent : E_1 seul.



$$I_1 = \frac{E_1}{R}.$$

2^ème^ régime permanent : $\boldsymbol{E_2}$ seul.



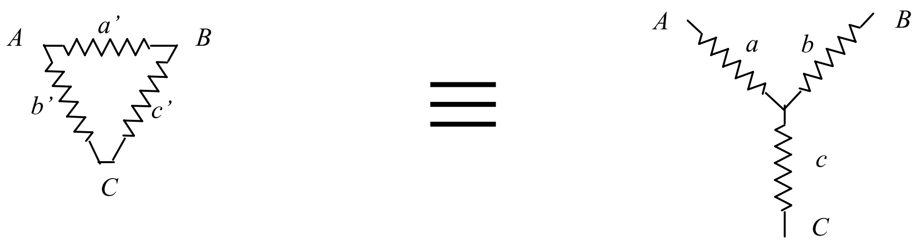
$$I_2 = \frac{E2}{R}$$

Si l'on Superpose les deux régimes, on retrouve le circuit de départ et $\boldsymbol{I = I_1 + I_2}$ =>

$$\boldsymbol{I = \frac{E_1 + E_2}{R}}$$

III.6. Transformation Etoile – Triangle ou de Kenelly.

Dans certains circuits, quelques branches peuvent être groupées sous forme de triangle. Le calcul des courants et parfois de la résistance équivalente est un peu plus compliqué dans ce cas. Alors on utilise une transformation dite de Kenelly. On transforme une configuration triangle en une configuration étoile :



Triangle *Etoile*

On montre que :

$$a = \frac{a'b'}{a'+b'+c'}$$

$$b = \frac{a'c'}{a'+b'+c'}$$

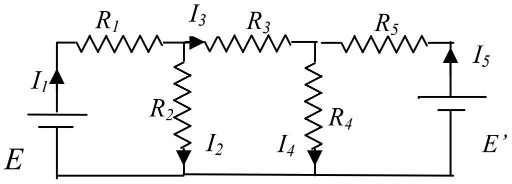
$$c = \frac{b'c'}{a'+b'+c'}$$

III. 7. Méthode des mailles indépendantes.

Nous avons vu à l'aide des lois de Kirchhoff que pour un réseau à (*b*) branches, nous avons (*b*) équations indépendantes à (*b*) inconnues qui sont les courants de chaque branche. Avec la méthode dite méthode des mailles indépendantes, on simplifie presque à moitié le nombre d'inconnues.

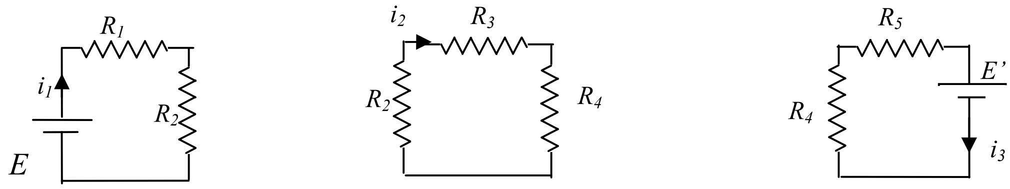
Deux mailles sont dites **indépendantes** si elles n'ont pas de **surface commune**. La méthode consiste à séparer les mailles et à traiter chaque maille comme si elle était seule. Ensuite on applique à chaque maille la loi de Pouillet, un peu modifiée, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant :

Soit à calculer les courants de chaque branche du réseau :



On prendra $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$

Dans ce réseau, il y a trois mailles indépendantes. On les sépare et l'on suppose que chacune d'elles est parcourue par un courant fictif (i_1, i_2 et i_3). Tous les courants fictifs doivent avoir le même sens (choisi au hasard).



On applique la loi de Pouillet modifiée :

1[ère] maille : $E = (R_1 + R_2)\ i_1 - R_2\ i_2$. Le terme ($-R_2\ i_2$) est ajouté car dans la deuxième maille, la même résistance est parcourue par i_2 mais dans le sens opposé à celui de i_1.

2[ème] maille : $0 = (R_2 + R_3 + R_4)\ i_2 - R_2\ i_1 - R_4\ i_3$. Le terme correctif est ($- R_2\ i_1 - R_4\ i_3$).

3[ème] maille : $-E' = (R_4 + R_5)\ i_3 - R_4\ i_2$. Le terme correctif est ($- R_4\ i_2$).

Avec $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$, nous avons le système d'équations :

$$\begin{cases} 2Ri_1 - Ri_2 + 0i_3 = E \\ Ri_1 - 3Ri_2 + Ri_3 = 0 \\ 0i_1 + Ri_2 - 2Ri_3 = E' \end{cases}$$

Si l'on utilise par exemple la méthode des déterminants pour trouver les solutions, nous aurons : $\Delta = 8R^3$, $\Delta_{i_1} = 5R^2E - R^2E'$, $\Delta_{i_2} = 2R^2E - 2R^2E'$, $\Delta_{i_3} = R^2E - 5R^2E'$

D'où : $i_1 = \dfrac{5E - E'}{8R}$; $i_2 = \dfrac{2E - 2E'}{8R}$; $i_3 = \dfrac{E - 5E'}{8R}$

Pour trouver les courants réels, il suffit de comparer le circuit d'origine et les mailles indépendantes. En effet on remarque que la branche contenant R_1 est parcouru par I_1 d'un coté et par i_1 de l'autre coté. Les deux courants sont dans le même sens. Donc $I_1 = i_1$. De même $I_3 = i_2$. Par contre $I_5 = -i_3$ car ces deux courants sont dans des sens opposés. La résistance R_2 est parcourue par i_1 dans la première maille et par i_2 dans la deuxième. En respectant les sens, on a donc : $I_2 = i_1 - i_2$. De même pour la résistance R_4 : $I_4 = i_2 - i_3$. En tout nous avons :

$$I_1 = i_1 = \frac{5E - E'}{8R}$$

$$I_2 = i_1 - i_2 = \frac{3E + E'}{8R}$$

$$I_3 = i_2 = \frac{2E - 2E'}{8R}$$

$$I_4 = i_2 - i_3 = \frac{E + 3E'}{8R}$$

$$I_5 = -i3 = \frac{-E + 5E'}{8R}$$

Exercices d'Electrocinétique

Pour bien assimiler cette partie du programme, l'étudiant aura besoin de connaître :