

III. LES CONDUCTEURS

III.1 Introduction.

III.1.1 Conducteurs et isolants.

Un conducteur est un élément de la matière dont les charges peuvent se déplacer sous l'action d'un champ extérieur. Les charges mobiles sont des électrons dans le cas d'un métal et des ions dans le cas d'une solution d'électrolyte.

Un isolant est un élément de la matière dont les charges sont liées à chaque atome et ne sont pas libres de se déplacer même sous l'action d'un champ extérieur.

Si l'on dépose une charge en un point d'un conducteur, elle créera un champ électrique en tous les points de celui-ci ; d'où déplacement des charges mobiles et à l'équilibre la charge sera répartie en différents points du conducteur. Par contre pour un isolant, il n'y a pas déplacement de charges et la charge initiale restera à l'endroit où elle a été déposée.

Dans la réalité un conducteur parfait n'existe pas de même qu'un isolant parfait est un cas idéal. Il n'existe que des mauvais isolants et des mauvais conducteurs.

Un conducteur est dit en **équilibre électrostatique** lorsque toutes les charges qu'il contient sont **immobiles**.

III.1.2 Propriétés d'un conducteur en équilibre.

Soit un conducteur (C) isolé, immobile et initialement neutre.

Isolé : pas d'influence entre le conducteur et les charges qui peuvent se trouver à son voisinage.

Immuable : si le conducteur n'est pas immobile ses charges ne le seront pas non plus.

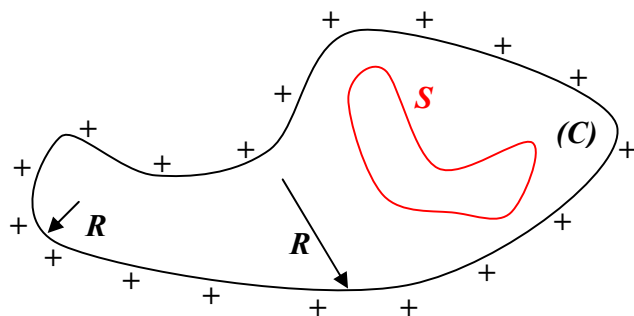
Initialement neutre : sa charge totale est nulle $\sum Q = 0 \Rightarrow \rho = 0, E = 0$ et $V = 0$.

On dépose une charge Q en un point de ce conducteur. A l'équilibre toutes les charges sont immobiles : $\sum \vec{F} = \vec{0} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Rightarrow V = \text{cte}$.

Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$ (S est une surface fermée quelconque dans le conducteur) $\Rightarrow \sum q_i = 0 \Rightarrow \rho = 0$. Donc la charge ne peut être que sur la surface du conducteur.

La distribution est superficielle (σ). Toute surface dans le conducteur est équipotentielle. On en déduit que toute la surface du conducteur est équipotentielle. Le potentiel étant une fonction continue, on en déduit que tout le conducteur est équipotentiel. A l'extérieur du conducteur, les lignes de champ seront donc perpendiculaires à sa surface.

σ varie d'un point de la surface à l'autre. En effet, si le rayon de courbure est faible σ augmente et si le rayon de courbure est grand σ diminue (voir TD).



Récapitulatif

Un conducteur (C) chargé en équilibre électrostatique est caractérisé par :

- $\vec{E} = \vec{0}$ dans tout le volume de (C).
- Le volume de (C) est équipotentiel.
- La distribution de charge est superficielle.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface de (C).

Cas particulier : conducteur creux.

Le potentiel étant une fonction continue \Rightarrow dans le creux le potentiel est aussi constant et égale au potentiel du conducteur $\Rightarrow \sum Q_i = 0 \Rightarrow$ absence de charges dans et sur la surface du creux. Les charges se répartissent uniquement sur la surface externe. **Un conducteur garde ses propriétés même s'il est creux.**

III.2. Théorème de Coulomb- Elément correspondants.**III.2.1 Théorème de Coulomb.**

Soit un point M placé au voisinage d'un conducteur (C) en équilibre. Et soit Σ une surface fermée composée de : $\Sigma = dS + \text{surface latérale} + \text{surface quelconque dans (C)}$.

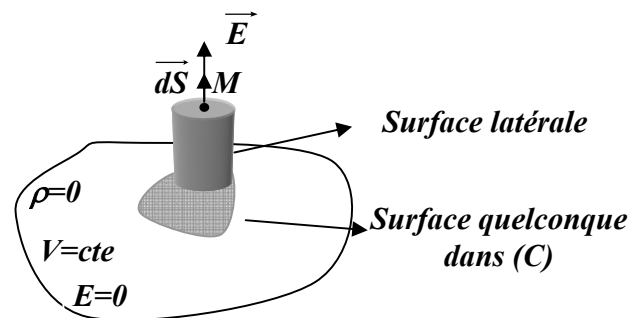
$$\Phi(\vec{E} / \Sigma) = \Phi(\vec{E} / dS) + 0 + 0 = \iint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S}$$

$$= \iint_{\Sigma} E dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0}$$

Théorème de Gauss :

$$\iint_{\Sigma} E dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \sigma dS$$

$$\text{D'où : } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

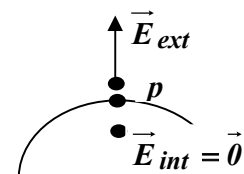


Au voisinage de la surface d'un conducteur à l'équilibre électrostatique près d'un point où la densité de charge est σ , le champ est normal à la surface du conducteur et il est égal à σ/ϵ_0 .

Remarques :

• Dans le conducteur le champ est nul $E_{int} = 0$. A son voisinage il vaut $E_{ext} = \sigma/\epsilon_0$. Il y a donc discontinuité du champ à la traversée d'une couche mince chargée. On suppose que sur la surface du conducteur (au point p) le champ est la moyenne entre E_{ext} et E_{int} :

$$E(P) = \frac{E_{int} + E_{ext}}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

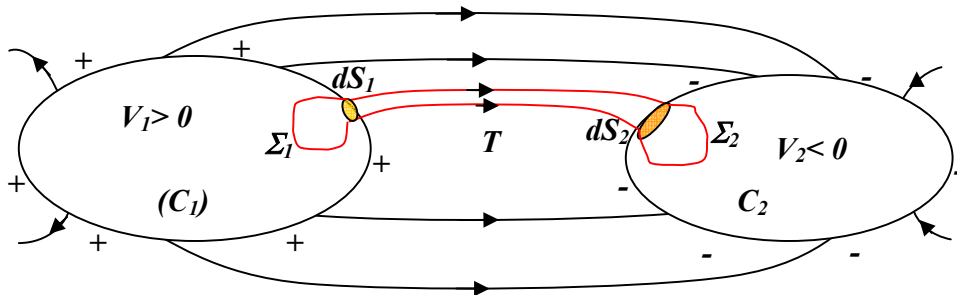


• Au point p il y a une charge (soit dq cette charge). Le point p est soumis donc à une force électrostatique $df = dq E \Rightarrow df = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS$. On définit au point p , la pression

électrostatique comme : $P = \frac{df}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

III.2.2 Éléments correspondants.

Soient deux conducteurs portant des distributions de charges opposées. Les lignes de champ auront l'allure :



$\Sigma_1 + \Sigma_2 + T = S = \text{surface fermée.}$

$T = \text{tube de champ.}$ Il découpe sur $(C1)$ dS_1 et sur $(C2)$ dS_2 . Soient dq_1 la charge contenue dans dS_1 et dq_2 celle contenue dans dS_2 . Dans C_1 et C_2 le flux de E est nul ($E = 0$) et à travers T le champ et le vecteur surface sont perpendiculaires :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{E} / S) &= 0 + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} (dq_1 + dq_2) \end{aligned}$$

$$dq_1 = -dq_2$$

Deux éléments, découpés sur deux conducteurs différents, par un même tube de champ, sont appelés éléments correspondants.

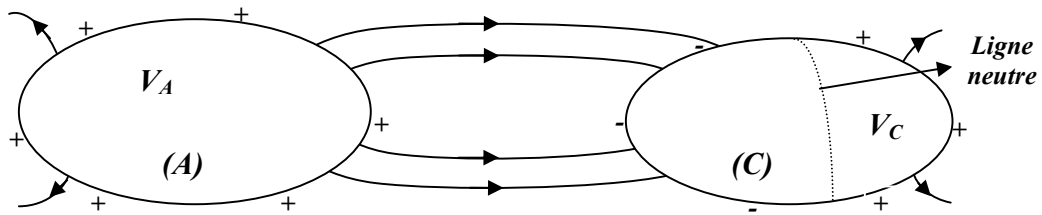
Deux éléments correspondants portent nécessairement des charges égales en module mais de signe contraire. Ils ne peuvent jamais appartenir à un même conducteur.

III.3. Influences électrostatiques.

III.3.1 Influence sur un conducteur isolé.

Soit un conducteur (C) initialement neutre et isolé $\Rightarrow Q=0, V=0$, (C) contient autant de charges + que de charges -. Et soit un conducteur (A) chargé.

En approchant (C) de (A) , (C) va subir électriquement des modifications. On dit qu'il est **influencé**. A cause de l'attraction coulombienne, sur la face de (C) qui regarde (A) , il y a apparition de charges (-) et sur la face opposée il y a apparition de charges (+). A l'équilibre nous aurons :



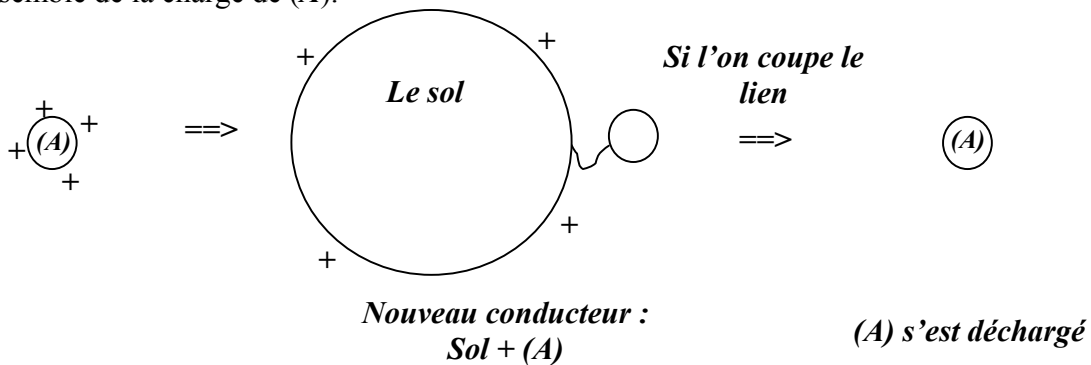
Les lignes de champ partent de (C) vers l'infini $\Rightarrow V_C > V_\infty = 0$
 et de (A) vers (C) $\Rightarrow V_A > V_C$.



D'où : - Etat initial $Q_C = 0$ $V_C = 0$
 - Etat final $Q_C \neq 0$ $V_C > 0$

Le conducteur (C) après influence a gardé une charge totale nulle mais son potentiel est passé de zéro à une valeur positive.

III.3.2 Influence sur un conducteur relié au sol.

La terre est un grand conducteur (grand réservoir de charges). Ce conducteur est neutre car il y a autant de charges + que de charges -. Si l'on relie un conducteur (A) chargé au sol, l'ensemble [sol + (A)] constituera un nouveau conducteur. La charge, initialement répartie sur la surface de (A), va se répartir sur toute la surface du nouveau conducteur. Etant donné que la surface de (A) est négligeable devant celle de la terre tout semble comme si la terre a absorbé l'ensemble de la charge de (A).



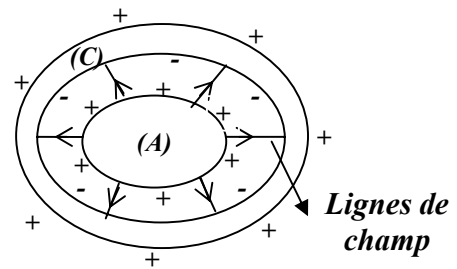
On schématise le sol par le symbole :  ou 

III.3.3 Influence totale.

On dit qu'il y a influence totale chaque fois que le corps influencé entoure complètement le corps qui l'influence.

Soient (C) un conducteur creux et initialement neutre et (A) un conducteur portant la charge Q_A . On place (A) dans (C). A l'équilibre, il va y avoir apparition de la charge $(-Q_A)$ sur la face interne S_i de (C) et $+Q_A$ sur sa face externe S_e .

Si (C) contenait la charge Q_C à l'état initial, sa charge sur S_e après influence serait $Q_A + Q_C$.
 Si l'on relie (C) au sol toute la charge sur S_e va disparaître.



III.3.4 Capacité et coefficient d'influence.

a- Capacité d'un conducteur seule et isolé

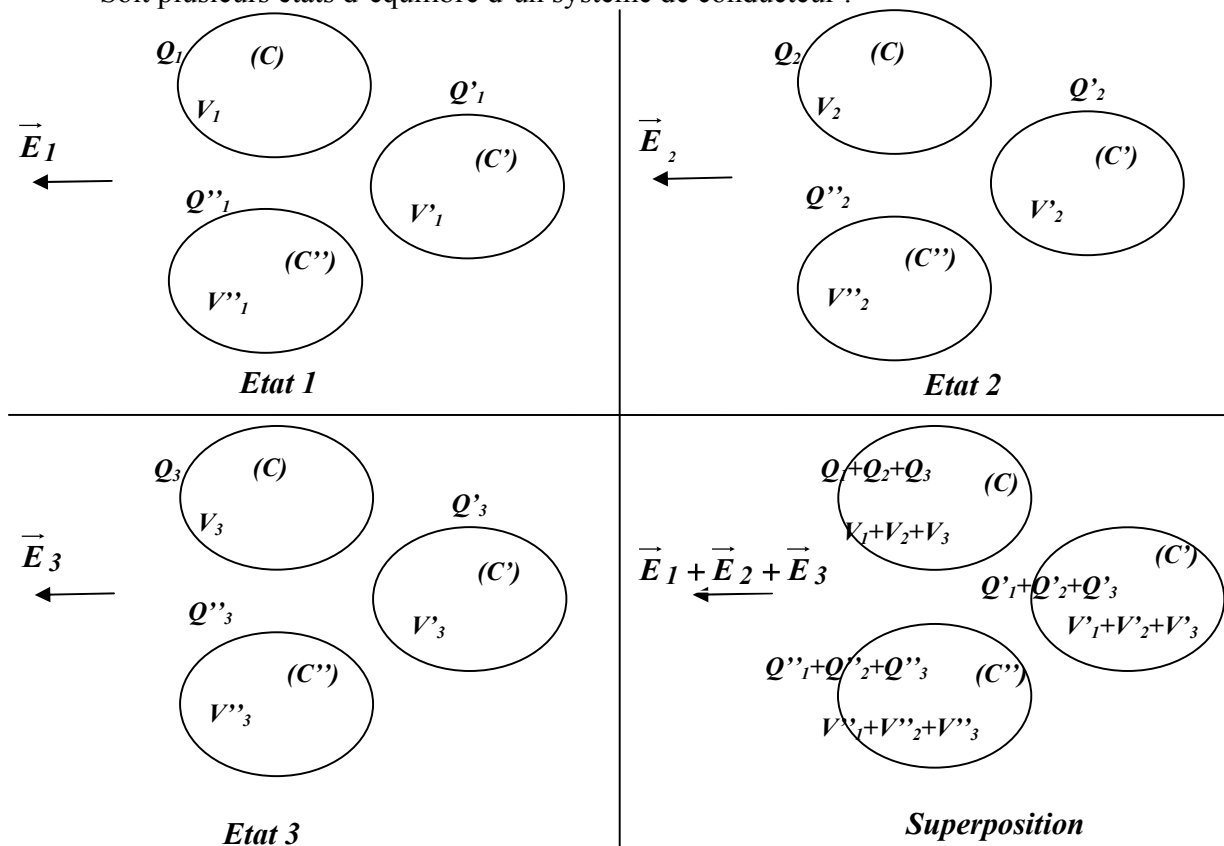
Soit (C) un conducteur ayant un potentiel V et une charge Q . Par définition $C = \frac{Q}{V}$ est la capacité du conducteur. C ne dépend que des dimensions et de la forme géométrique du conducteur. Elle est indépendante de sa nature, de son potentiel ou de sa charge.

La capacité s'exprime en Farad (F). Le Farad est une unité très grande, souvent on utilise les sous-multiples : picofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$), nanofarad ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$), microfarad ($1 \text{ }\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$).

b- Système de conducteur en équilibre électrostatique.

* Théorème de superposition

Soit plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteur :



A partir de plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteur, on obtient un nouvel état d'équilibre en les superposant. Les densités, les charges totales sur chaque conducteur et le potentiel en tout point de l'espace sont les sommes algébriques des valeurs dans chaque état d'équilibre. Le champ résultant en un point est la somme vectorielle des champs créés par chaque état d'équilibre. Toute superposition d'états d'équilibre est un nouvel état d'équilibre.

* Capacité et coefficients d'influence

Soit n conducteurs A_1, A_2, \dots, A_n ayant les charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n et les potentiels V_1, V_2, \dots, V_n . Supposons les états d'équilibre suivant :

1^{er} état, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf A_1 . Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul V_1 .

	A_1	A_2	...	A_n
Potentiel	V_1	0	...	0
Charge	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$...	$C_{n1}V_1$

$2^{ème}$ état, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf A_2 . Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul V_2 .

	A_1	A_2	...	A_n
Potentiel	0	V_2	...	0
Charge	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$...	$C_{n2}V_2$

$n^{ème}$ état, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf A_n . Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul V_n .

	A_1	A_2	...	A_n
Potentiel	0	0	...	V_n
Charge	$C_{1n}V_n$	$C_{2n}V_n$...	$C_{nn}V_n$

Superposition de ces n états d'équilibre :

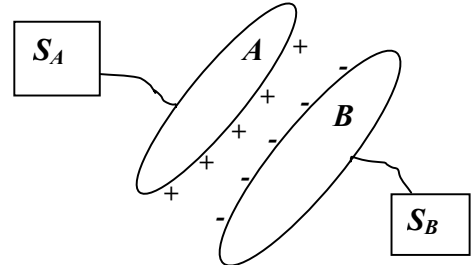
	A_1	A_2	...	A_n
Potentiel	V_1	V_2	...	V_n
Charge	$C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n$	$C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n$...	$C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n$

C_{ii} ($i = 1 \dots n$) est la capacité du conducteur A_i en présence des autres conducteurs. C_{ii} est différente de la capacité C d'un conducteur seul. Les C_{ii} sont toujours ≥ 0 .

C_{ij} (avec $i \neq j$) est dite coefficient d'influence entre le conducteur A_i et le conducteur A_j . Dans les tableaux ci-dessus, on peut permuter A_i avec A_j pour montrer facilement que $C_{ij} = C_{ji}$. Les C_{ij} sont toujours ≤ 0 .

III.3.5 Les condensateurs.

Soient deux conducteurs A et B reliés à deux sources de charges S_A et S_B .
 Chaque fois qu'il y a apparition d'une charge (+) sur A , il y a apparition, par influence d'une charge (-) sur B .
 L'ensemble des deux conducteurs constitue ce qu'on appelle un condensateur. A et B sont appelés les **armatures** du condensateur.



III.3.5.1 Capacité d'un condensateur.

Soient :

A : conducteur (Q_A, V_A)

B : conducteur creux, neutre et relié au sol

Après influence il apparaît la charge $-Q_A$ sur la face interne de B .

Nous aurons :

$$Q_A = C_{11}V_A + C_{12}V_B = C_{11}V_A$$

$$Q_B = C_{21}V_A + C_{22}V_B = C_{21}V_A = -Q_A$$

$$\Rightarrow C_{11}V_A = -C_{21}V_A \Rightarrow C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C$$

Isolons B du sol sans oublier que les capacités et les coefficients d'influence ne dépendent que de la forme des conducteurs. Q_B n'est plus égale à $-Q_A$ et nous aurons les équations d'influence :

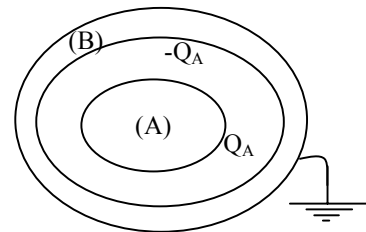
$$\begin{aligned} Q_A &= C_{11}V_A + C_{12}V_B \\ Q_B &= C_{21}V_A + C_{22}V_B \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \begin{aligned} Q_A &= C V_A - C V_B \\ Q_B &= -C V_A + C_{22}V_B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_A}{V_A - V_B}$$

C : est dite capacité du condensateur. C 'est le rapport entre la charge de l'armature interne et la différence de potentiel entre les deux armatures en commençant par l'armature interne.

Si l'on relie A et B par un fil conducteur, les deux faces en regard vont se neutraliser. On dit que le condensateur s'est déchargé.

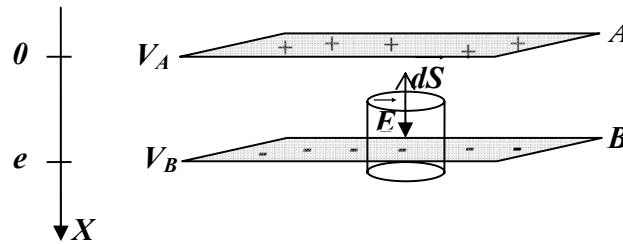


III.3.5.2 Application.

*Condensateur plan

On suppose que les armatures sont infinies.

S = deux surfaces de base ($SB1$ et $SB2$) + surface latérale (SL).



$$\begin{aligned}\Phi(\vec{E} / \Sigma) &= \Phi(\vec{E} / SB1) + \Phi(\vec{E} / SB2) + \Phi(\vec{E} / SL) \\ &= -ES + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (-\sigma)S \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

2^{ème} méthode :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(\text{plan+}) + \vec{E}(\text{plan-}) \\ E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

La charge Q contenu dans σ est $Q = \sigma S$ donc $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$

$$dV = -E dx \Rightarrow \int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_0^e E dx = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} e \Rightarrow V_A - V_B = \frac{Q}{\epsilon_0 S} e$$

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Nous remarquons une autre fois que la capacité ne dépend ni de la charge ni du potentiel des armatures. Elle dépend des dimensions du condensateur et du milieu dans lequel il est placé (ici le vide : ϵ_0).

Si l'on place le condensateur dans un milieu, autre que le vide, caractérisé par une permittivité ϵ , la capacité aura pour expression : $C = \frac{\epsilon S}{e}$ avec $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ou ϵ_r est la permittivité relative du milieu considéré.

III.3.5.3 Groupement de condensateur.

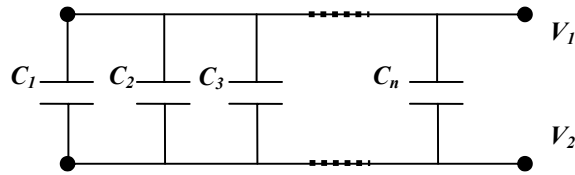
***En parallèle**

On schématise un condensateur par :

Les deux traits verticaux sont ses armatures.



Supposons que l'on a n condensateurs soumis à une différence de potentiel ($V_1 - V_2$) et groupés comme l'indique le schéma suivant :



On dit que les n condensateurs sont branchés en parallèle car ils sont soumis à la même différence de potentiel. Nous avons : $Q_1 = C_1(V_1 - V_2)$, $Q_2 = C_2(V_1 - V_2)$, ..., $Q_n = C_n(V_1 - V_2)$. Or la charge totale répartie sur les condensateurs est $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$

$$\Rightarrow Q = C_1(V_1 - V_2) + C_2(V_1 - V_2) + \dots + C_n(V_1 - V_2) \\ = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(V_1 - V_2) \quad (2.3)$$

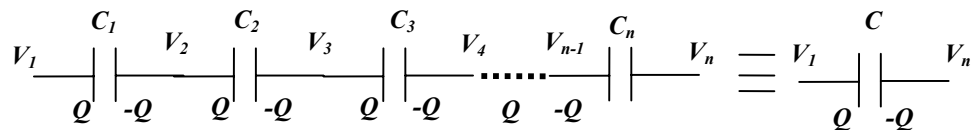
On veut que tous ces condensateurs soient équivalents à un seul condensateur de capacité C_{equ} soumis à la même différence de potentiel ($V_1 - V_2$) avec sa charge Q obéissant à :

$$Q = C_{equ}(V_1 - V_2). \quad (2.4)$$

$$\text{En comparant (2.3) et (2.4) on en déduit : } C = \sum_{i=1}^n C_i$$

*En série

Maintenant supposons que les condensateurs sont groupés selon :



On dit que les n condensateurs sont branchés en série.

Nous avons : $Q = C_1(V_1 - V_2)$, $Q = C_2(V_2 - V_3)$, ..., $Q = C_n(V_{n-1} - V_n)$ d'une part et $Q = C(V_1 - V_n)$ d'autre part.

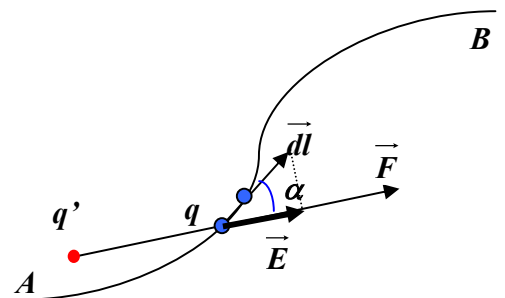
$$\text{Ce qui nous donne : } \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

III.4. Energie électrostatique.

III.4.1 Définition.

Soit q une charge qui se déplace, sous l'effet d'un champ extérieur \vec{E} , de A vers B . \vec{E} est créée par une autre charge q' . Le travail nécessaire pour faire déplacer q de dl est :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F dl \cos \alpha = qEdl \cos \alpha$$



Correction de signe

Si la force est résistante $\cos \alpha < 0$ et $dW > 0$

Si la force est motrice $\cos \alpha > 0$ et $dW < 0$ donc dans les deux cas il faut ajouter un signe (-) à l'expression dW . On écrit alors :

$$dW = -\vec{F} \cdot \vec{dl} = -Fdl \cos \alpha = -qEdl \cos \alpha$$

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = q \int_{AB} Edl \cos \alpha = q(V_A - V_B)$$

Si A est à l'infini $V_A = 0 \Rightarrow W = q V_B$. W est le travail nécessaire pour ramener la charge q de l'infini au point B .

On appelle énergie électrostatique d'une charge q soumise sous l'action d'un champ électrique, le travail qu'il faut fournir contre les forces électrostatiques pour ramener cette charge de l'infini où le potentiel est nul jusqu'à sa position actuelle où le potentiel est V .

$$W_e = qV$$

III.4.2. Energie d'un conducteur.

Supposons que l'on charge un conducteur :

Etat initial	$Q = 0$	$V = 0$
--------------	---------	---------

Etat intermédiaire	q	v
--------------------	-----	-----

Etat final	Q	V
------------	-----	-----

Plaçons-nous à l'état intermédiaire. La charge se fait progressivement en amenant dq de l'infini jusqu'au conducteur où le potentiel est v . Il faut donc accomplir le travail $dW = dqv$. A l'état

final, nous aurons accompli le travail : $W = \int v dq = \int \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2}$

$$\Rightarrow W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

Remarque

L'énergie d'un système de conducteurs en équilibre est la somme des énergies de chaque conducteur. $W = \sum_i \frac{Q_i V_i}{2}$

L'énergie d'un condensateur va être donc $W = \frac{1}{2} QV$, où Q est la charge d'une armature et V son potentiel.