Examen d'Analyse II

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit. Bon courage.

Exercice 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^n t \, dt$.

1. Calculer I_0, J_0, I_1, J_1.
2. Montrer que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. a. Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t$.

   b. En déduire que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{J_n}{I_n}$ converge vers 0.
5. a. Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left((n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. En déduire que $\dfrac{J_n}{I_n} - \dfrac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \dfrac{2}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite de terme général S_n converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2.

Toutes les fonctions entrant en jeu dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. On souhaite résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ \cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$$

   a. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $\varphi(t) = \cos(t)z(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $\varphi''(t)$ en fonction de $z(t)$, $z'(t)$ et $z''(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   b. En déduire les solutions de (E).

2. On souhaite maintenant résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(F)\ :\ \ (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

   a. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1,1[$. On pose $z(t) = y(\sin(t))$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arcsin x)$, $z'(\arcsin x)$ et $z''(\arcsin x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

   b. En déduire que y est solution de (F) sur $]-1,1[$ *si et seulement si* z est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire les solutions de (F).

3. Soit f une solution de (F) sur $]-1,1[$.

   a. Montrer par récurrence que f est de classe C^∞.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n à l'aide de la question précédente.

   d. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{((2p)!)^2}{2^{2p}\,(p!)^2} a_0 \qquad\qquad a_{2p+1} = 2^{2p}\,(p!)^2\, a_1$$