ENSA KENITRA

Durée: 2H

Examen d'Analyse de base 2

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit. Bon courage.

Exercice 1 *Soit* $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

1. *Calculer* I_0.
2. (a) *Montrer que* $I_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   (b) *Etablir que la suite* (I_n) *est décroissante.*
   (c) *En déduire que la suite* (I_n) *est convergnente.*
3. (a) *Justifier l'égalité :* $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ *pour tout* $x \in [0,1]$.
   (b) *En déduire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\quad I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (c) *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$
4. (a) *En utilisant une intégration par parties, montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

   (b) *Montrer que*

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$$

   et en déduire un encadrement de I_n.
   (c) *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$

Exercice 2 1. *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $f(0) = 1$ *et* $\forall t \neq 0, \quad f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$.

   (a) *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et paire.*
   (b) *Donner le développement limité à l'ordre* 1 *de* $f(t)$ *au voisinage de* 0. *En déduire que* f *est dérivable en* 0, *et donner* $f'(0)$.
   (c) *Justifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et calculer* $f'(t)$, *pour* $t \in \mathbb{R}^*$.
   (d) *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :*
   $\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$.
   En déduire le sens de variation de f.
   (e) *Tracer la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).*
   (On ne demande pas l'étude des points d'inflexion)

2. *Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :* $\phi(0) = 1$ *et* $\forall x \neq 0,\ \phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt.$

   (a) *Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.*

   (b) *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant \phi(x) \leqslant 1.$ *(on pourra commencer par supposer $x > 0$)*

   (c) *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \phi'(x) = \dfrac{1}{x}\left(f(x) - \phi(x)\right).$

   Montrer que ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0) = 0$. Donner les variations de ϕ.

   (d) *Montrer que :* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0.$ *En déduire que* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 0.$

   (e) *Tracer la courbe représentative de ϕ dans le même repére que celle de f.*

   (On ne demande pas l'étude des points d'inflexions)

3. *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:* $u_{n+1} = \phi(u_n)$, *où ϕ est l'application du 2).*

   (a) *Montrer que :* $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}.$

   (b) *Montrer que, pour tout x strictement positif :* $|\phi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}(1 - f(x)) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt.$
   (On pourra utiliser 2.2 et 2.3).

   En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$, *et que cette inégalité reste vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}$.*

   (c) *Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = x$ admet une unique solution. On note α cette solution.*
   Montrer que $\alpha \in]0;1]$.

   (d) *Prouver que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|.$

   En déduire que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

4. *On considère l'équation différentielle :* $x^2y' + xy = \arctan(x).$

   (a) *Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.*

   (b) *Montrer que ϕ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.*