Contrôle continu d'Analyse

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit. Bon courage.

Exercice 1 *Soit* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que la suite* (I_n) *est décroissante.*
2. *Montrer que la suite* (I_n) *est strictement décroissante.*
3. *Soit* $\varepsilon \in]0, \pi/2[$.
   (a) *Montrer que* $I_n \leq \frac{\pi}{2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \varepsilon$.
   (b) *En déduire que* (I_n) *converge vers 0.*

   Dans la suite, on va chercher à déterminer un équivalent de I_n *au voisinage de* $+\infty$.
4. *Etablir que, pour tout* $n \in$, *on a :* $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
5. *Montrer que*
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
6. *Montrer que* $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
7. *Montrer que* $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
8. *Montrer que* $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 2 *On cherche à résoudre sur* $\mathbb{R}_+^*$ *l'équation différentielle :*

$$x^2y" - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. *Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?*
2. *Soit* y *une solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Pour* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $z(t) = y(e^t)$.
   (a) *Calculer pour* $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ *et* $z''(t)$.
   (b) *En déduire que* z *vérifie une équation différentielle lináire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.*
   (c) *Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.*
   (d) *En déduire* y.
3. *Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées sont bien toutes les solutions (E) et conclure.*

Exercice 3 1. *Déterminer la limite de la suite de terme général*

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

2. *Etudier les limites de* $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ *et de* $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Examen d'Analyse II

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit.
Bon courage.

Exercice 1 1. *Soient* $(\alpha, \beta, n, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$. *Calculer*

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)^n (t-\beta)^p dt.$$

2. *Résoudre les équations différentielles suivantes :* $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$;

Exercice 2 1. *Etudier et construire l'arc paramétré* $\Gamma : \begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$

2. *Calculer la longueur* L *de* (Γ).
3. *Déterminer le repére de Frenet en chaque point* $M(t)$ *de* Γ.
4. *Calculer le rayon de courbure* $R(t)$ *en chaque point* $M(t)$ *de* Γ.
5. *Déterminer le centre de courbure de* Γ *en chaque point* $M(t)$ *de* Γ.
6. *Déterminer la représentation paramétrique de la développée de* Γ.
7. *Etudier et construire la développée de* Γ.

Exercice 3 *On considère l'équation différentielle* $y' + 2xy = 1$

1. *De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?*
   On désigne par f *l'une de ses solutions sur* $\mathbb{R}$ *que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.*
2. (a) *Prouver que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.
   (b) *Quelle est la valeur de* $f'(0)$?
3. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.
4. (a) *Montrer que* f *admet en* 0 *un développement limité à tout ordre* p *(*p *entier naturel).*
   Ecrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   $f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + \circ(x^p)$.
   Exprimer a_n *en fonction de* $f^{(n)}(0)$.
   (b) *A l'aide du résultat de la question 3, montrer que :* $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k . k!}{(2k+1)!}$.
   (c) *Obtenir également l'expression des termes* a_{2k}, *à l'aide de* $f(0)$ *(*k *entier naturel).*
   On considère la fonction de la variable réele : $D : x \longrightarrow D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.
5. *Justifier le fait que* D *est une fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$, *et vérifier que* D *est une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $y' + 2xy = 1$.
6. *Etudier la parité de* D.
7. *Prouver que :* $\forall x \in \mathbb{R}^+, xe^{-x^2} \leqslant D(x) \leqslant x$.
8. (a) *Prouver que :* $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$

(b) *Soit la fonction* $h : t \longrightarrow \frac{e^{t^2}}{t^2}$. *Montrer que* h *est croissante sur* $[1, +\infty[$
En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$,
et qu'au voisinage de $+\infty$: $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = \circ(\frac{e^{x^2}}{2x})$.

(c) *En déduire qu'au voisinage de* $+\infty$: $\int_1^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$.
En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ *au voisinage de* $+\infty$.

9. (a) *Prouver que* D *admet un maximum, atteint en un point.*
   (b) *Prouver que ce maximum est égale à* $\frac{1}{2b}$.
   (c) *En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.*
10. *Déterminer à l'aide de* D *l'ensemble des fonctions solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle :* $y' + 2xy = 1$.
11. *Montrer l'existence d'une unique solution impaire.*