ENSA KENITRA

Examen de rattrapage d'Analyse 2

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importats dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit.
Bon courage.

Exercice 1 1. *Pour $n \geq 0$, on définit*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

(a) *Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.*

(b) *Pour $n \geq 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.*

(c) *En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.*

2. *On note, pour $n \geq 1$,*

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Soit également $\alpha \in [0, 1[$.

(a) *Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

(on pourra encadrer $\int_0^\alpha$ puis $\int_\alpha^1$).

(b) *Démontrer que (I_n) est croissante.*

(c) *Déduire des questions précédentes que (I_n) converge vers 1.*

(d) *En s'inspirant du modèle précédent, étudier*

$$J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-n\sin t} dt.$$

Exercice 2 *On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :*

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. *Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?*
2. *Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.*
   (a) *Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.*
   (b) *En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.*
   (c) *Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.*
   (d) *En déduire y.*
3. *Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées sont bien toutes les solutions (E) et conclure.*