TD d'Analyse 1 : Suites numériques.

CPI 1 / S 1.

Exercice 1 :

Etudier la convergence des suites suivantes.

(1) $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$ (2) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$ (3) $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ (4) $u_n = \cos((n+\frac{1}{n})\pi)$

(5) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ (6) $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$ (7) $u_n = (\sin \dfrac{1}{n})^{1/n}$

Exercice 2 :

On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. En utilisant une intégrale, montrer que $(\forall n > 0)$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Etablir que pour tout $p > 1$,
$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
En déduire la limite de (S_n).
2. Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite de réelle strictement positive.

1. On suppose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.
   (a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.
   (b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
   (c) Observer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.
2. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.
   (a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.
   (b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
   (c) Montrer que dans le cas ℓ =1 on ne peut rien conclure.
3. Montrer que si la suite $(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers un réel p, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et a même limite.
4. Application : limites de a) $\sqrt[n]{C_{2n}^{n}}$ b) $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ c) $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice 5 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite et $v_n = \dfrac{1}{n}\,(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite ℓ, démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite ℓ.
   Application : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$, montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right) = 0.$$
2. Si $u_n = (-1)^n$, vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. (On pourra montrer que si (u_n) dépasse M à partir du rang N, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} v_{N+k} \geq M$).

Exercice 6 :

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$. On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que ${u_{n+1}}^2 - a = \dfrac{({u_n}^2 - a)^2}{4{u_n}^2}$.
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation ${u_{n+1}}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$ montrer que $u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 7 :

Soient $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

1. Montrer que les suites $(v_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 8 :

Soient a, b deux réels strictement positifs. On considère les suites définies par :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'elles convergent vers la même limite. Cette limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 9 :

On considère les deux suites : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$; $n \in \mathbb{N}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.
2. Montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Bonne chance