

Cycle Préparatoire-Semestre 2

Série n° 1 : Développements limités

Exercice 1

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
4. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
5. $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
6. $\sin(x) \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0
7. $\cos(x) \ln(x+1)$ à l'ordre 4 en 0
8. $\frac{\ln(x+1)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0
9. $(\cos(x))^{\sin(x)}$ à l'ordre 5 en 0
10. $x(\cosh(x))^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 2

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0;
2. $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$ en 0;
3. $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ en 0;
4. $\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0;

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 4

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$
2. $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

Exercice 5

On pose $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$. Préciser les positions relatives au voisinage de 0 des courbes représentatives C_f, C_g, C_h, C_k .

Exercice 6

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$
2. $g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
3. $h(x) = \frac{x+1}{1 + \exp(1/x)}$
4. $u(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$