CPI 1/S1

Exercice 1

Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$\text{a) } f : x \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & si x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad \text{b) } g : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x) & si x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \arctan\left(\mathrm{e}^x\right), f_2(x) = \arctan\left(\mathrm{sh}x\right) et f_3(x) = \arctan\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)$$

Qu'en déduire ?

Exercice 3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On définit une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & si x \in [0,1/2] \\ f(2x-1) & sinon \end{cases}$$

A quelle condition(s) la fonction g est-elle dérivable ?

Exercice 4

Soit f une fonction dérivable en un point x_0. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0 ?

Exercice 5

Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq mx$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a+2h]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).
Montrer

$$\exists c \in \left]a, a+2h\right[, f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

(indice : introduire $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$.)

Exercice 7

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2), \; f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Démontrer que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $f'(0)$?

3. Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ pour tout $x > 0$. En déduire que $|f'(x)| \leq 1/2$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$

Exercice 8

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a,b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 9

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$.
2. En déduire que si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.
3. Application : déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n. On suppose qu'il existe $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ tels que $f(x_i) = 0$ pour tout i. Soit également $a \in [x_1, x_n]$. Montrer qu'il existe $\lambda \in]x_1, x_n[$ tel que

$$f(a) = (a - x_1) \ldots (a - x_n) \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}.$$

Exercice 11

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Plus précisément, montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x).$$

Exercice 12

1. Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$
2. Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$ est $(-1)^n x^{-(n+1)} e^{\frac{1}{x}}$.
3. On pose $f : x \mapsto [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$.
   (a) Montrer que f est une fonction polynômiale de degré n.
   (b) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
   (c) Montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1, 1[$.