TD d'Analyse 1 : Limites et continuité.

CPI 1 / S 1.

Exercice 1 :

Étudier les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x}$$

$$g)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+7}{x^2+4}$$

Exercice 2 :

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\,|x|}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2\,|x|}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$$

$$d)\ \lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \qquad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} \qquad h)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$$

Exercice 3 :

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Exercice 4 :

Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier et déterminer, si elles existent,les limites en 0 des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$ et $g : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor \dfrac{b}{x}$.

Exercice 5 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité de $f : x \mapsto \lfloor x+1 \rfloor - (x + \lfloor x \rfloor)^2$, sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 :

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $f(x) = \sin(x)\sin(1/x)$ si $x \neq 0$;
2. $g(x) = \cos(x)\cos(1/x)$ si $x \neq 0$;
3. $h(x) = \sin(x+1)\ln|1+x|$ si $x \neq -1$.

Exercice 7 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Montrer que f est discontinue en tout point.
2. Soient $f, g \in C(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ telles que : $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$. Montrer qu'alors f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 8 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
1. Montrer que si $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe.
2. Montrer que si $[a, b] \subset f([a, b])$ alors f admet un point fixe.

Exercice 9 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)^2 = 1$. Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p, q deux réels strictement positifs. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 10 :

1. Soient $f,\ g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [a,\ b],\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a,\ b],\ f(x) \leq g(x) - \alpha$.
2. On suppose que $f,\ g$ vérifient : $\forall x \in [a,\ b], 0 < g(x) < f(x)$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que, pour tout x de $[a,\ b]$: $f(x) \geq \alpha g(x)$.

Exercice 11 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est une fonction constante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\dfrac{x+1}{2}) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :

Soit $f : [a; b] \longrightarrow$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in$ tel que : $\forall x \in, f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 13 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 14 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.
1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.
2. Déterminer, pour $y \in]-1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Bonne chance