ENSA
KENITRA

Examen : Analyse I

PROBLEME I

Partie I

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1.a Calculer $f(0)$ et établir que f est une fonction impaire.

1.b Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(nx)=nf(x)$. Etendre cette relation à $n\in\mathbb{Z}$.

1.c On pose $a=f(1)$. Montrer que pour tout $u\in\mathbb{Q}$, $f(u)=au$.

1.d En exploitant la continuité de f, établir enfin que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.

2. Soit $g:\mathbb{R}\to]-1,1[$ une application continue telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

2.a Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

Montrer que φ est réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(x+y)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\varphi(x)\varphi(y)}.$$

2.b On pose $h=\varphi^{-1}\circ g$. Exprimer $h(x+y)$ en fonction de $h(x)$ et $h(y)$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$.

2.c En déduire la forme de l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

Partie II

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable en 0 vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(2x)=\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

1. Montrer que $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ est solution du problème posé.

2. On considère dans cette question f une solution du problème posé.

2.a Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

2.b Montrer que $-f$ est aussi solution

2.c Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq f(x)\leq 1$.

3. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0)=1$.

On considère $x\in\mathbb{R}$ et l'on définit la suite (u_n) par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

3.a Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3.b Etablir une relation entre u_n et u_{n+1}.

3.c En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant et préciser celui-ci.

3.d Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire que celle-ci est constante égale à 1.

3.e Qu'en déduire quant à la fonction f ?

3.f Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0)=1$ » et remplacée par « $f(0)=-1$ » ?

4. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0)=0$.

4.a En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que ci-dessus, montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 1$ et $f(x)\neq -1$.

4.b On introduit la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\varphi^{-1}(f(x))$.
Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, g(2x)=2g(x)$ et que g est dérivable en 0.

4.c En déduire une expression de $f(x)$ dépendant d'un paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$.

PROBLEME II

Partie I

Soit $a < b$ deux réels et $I = [a,b]$.

On se donne $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- $\forall x \in I, g(x) \in I$,
- et il existe une constante $\exists k \in [0,1[$ pour laquelle on ait $\forall (x,y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq k|x-y|$.

1.a Justifier que g est continue.

1.b Montrer que l'équation $g(x) = x$ possède une solution dans l'intervalle $[a,b]$ puis que celle-ci est unique. Nous la noterons α.

2. Soit $u \in [a,b]$ et (x_n) la suite réelle définie par :
$x_0 = u$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.

2.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x_n - \alpha| \leq k^n |u - \alpha|$.
En déduire la limite de la suite (x_n).

2.b Etablir que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$: $\left|x_{n+p} - x_n\right| \leq \dfrac{1-k^p}{1-k}\left|x_{n+1} - x_n\right|$.

2.c En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

3. On suppose que g est dérivable en α.

3.a Etablir $|g'(\alpha)| \leq k$.

3.b On reprend les notations de la question 2.
Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$.

Partie II

On se donne deux réels $a < b$ réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $\forall x \in [a,b], f'(x) > 0$.

On s'intéresse à la résolution de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in [a,b]$.

1.a Montrer que cette équation possède une unique solution α appartenant à $]a,b[$.

1.b Soit $x_0 \in [a,b]$.
Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à f en x_0.

2. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

2.a Justifier que g est de classe C^1.

2.b Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que f est de surcroît concave.
On considère ensuite la suite (x_n) définie par : $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.

3.a Montrer que la suite (x_n) est bien définie, croissante et que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a, \alpha]$.

3.b Etablir que $x_n \to \alpha$.