Examen d'Analyse de base I :

S1

Durée : 2h

Questions de cours :

1. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute suite réelle croissante est convergente ou diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que deux suites réelles adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$; et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que, pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = nu_n$, $n \geq 0$, est croissante.
4. Montrer que la suite $(v_n)_n$ admet une limite l appartenant à $]0,1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
5. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que $(w_n)_n$ converge vers $l(1-l)$.
6. Soit $(t_n)_n$ une autre suite telle qu'il existe $n_0 \geq 1$ vérifiant que, pour $n \geq n_0$, on a
$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n},$$
où $a > 0$. Montrer que $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$ pour $n \geq n_0$, puis que $(t_n)_n$ est divergente.
7. Montrer que si $l \neq 1$, la suite $(v_n)_n$ vérifie les mêmes conditions que la suite $(t_n)_n$ de la question précédente. En déduire la valeur de l.

Exercice 2 :

1. Soit f et g deux applications continues de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.
   (a) Montrer que f admet au moins un point fixe.
   (b) On note F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F admet un plus grand et un plus petit élément.
   (c) Montrer que F est stable par g.
   (d) Montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = g(x)$.
2. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y).$$
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
   (b) Déterminer f si $f(0) = 0$.
   On suppose $f(0) \neq 0$.

(c) Démontrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

(d) En déduire que, pour tout réel x, $f(x)$ est strictement positif.

(e) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}$.

<u>**Bonne chance**</u>